

第一部分：選擇題

1、下列大小關係正確的是 ( )。

- A.  $\log_{0.5} 6.7 > \log_2 5.6 > \log_2 4.3$       B.  $\log_{0.5} 6.7 < \log_2 4.3 < \log_2 5.6$   
C.  $0.5^{-6.7} > 2^{-5.6} > 2^{-4.3}$       D.  $0.5^{-6.7} < 2^{-5.6} < 2^{-4.3}$

2、已知兩數的和是 6，以及它們的差的絕對值為 8，那麼以這兩個數為根的一元二次方程是 ( )。

- A.  $x^2 - 6x + 8 = 0$       B.  $x^2 + 6x - 8 = 0$   
C.  $x^2 - 6x - 7 = 0$       D.  $x^2 + 6x + 7 = 0$

3、若  $M = \{x | 1 < x \leq 3\}$ ， $N = \{x | -1 \leq x < 2\}$ ， $P = \{x | 0 < x \leq 4\}$ ，則  $(M \cup N) \cap P$  中整數的個數是 ( )。

- A. 2      B. 3      C. 4      D. 5

4、一次函數  $y = f(x)$  滿足條件  $f(2) = 4, f(3) = 1$ ，則  $f(5) =$  ( )。

- A. -5      B. 2      C. 3      D. 10

5、 $f(2x) = \log_3(8x^2 + 7)$ ，則  $f(1) =$  ( )。

- A.  $\log_3 39$       B. 1      C.  $\log_3 15$       D. 2

6、不等式  $x^2 + 14 > -6(x - 5)$  的解集是 ( )。

- A.  $\{x | x < -8 \text{ 或 } x > 2\}$       B.  $\{x | -8 < x < 2\}$   
C.  $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 8\}$       D.  $\{x | -2 < x < 8\}$

7、函數  $y = \sin x(2 \sin x - \cos x) + 1$  的最小正週期是 ( )。

- A.  $\frac{\pi}{2}$       B.  $\pi$       C.  $2\pi$       D.  $4\pi$

8、有編號為 1 至 5 的五台電腦，五名學生上機實習，每人使用一台，其中學生甲必須用 1 號電腦，那麼不同分配方案的種數是 ( )。

- A. 4      B. 5      C. 24      D. 120

9、已知數列  $\{a_n\}$ ， $a_n = \frac{1}{2n(n+1)}$  ( $n \in N^*$ )，那麼這個數列前 10 項的和是 ( )。

- A.  $\frac{9}{10}$       B.  $\frac{9}{20}$       C.  $\frac{10}{11}$       D.  $\frac{5}{11}$

10、判斷直線  $3x - 4y + 3 = 0$  與圓  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$  的位置關係 ( )。

- A. 相離      B. 相交且直線過圓心  
C. 相交且直線不過圓心      D. 相切

## 第二部分：計算題

11、設  $\alpha \in (0, 2\pi)$ ， $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，求  $\cos 2\alpha$ 。

12、已知  $f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x}$ ，求  $f(x)$ 。

13、直線  $y = x + 4$  和橢圓  $3x^2 + y^2 = 28$  交於  $P$ 、 $Q$  兩點，求以線段  $PQ$  為直徑的圓的方程。

14、已知數列  $\{a_n\}$  滿足  $a_{n+1} = a_n + n + 1$ ， $a_1 = 3$ ，求數列  $\{a_n\}$  的通項。

15、用數學歸納法證明：

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (n \text{ 爲正整數})$$

### Part 1: Multiple-choice

1、Which inequality is valid?

- A.  $\log_{0.5} 6.7 > \log_2 5.6 > \log_2 4.3$       B.  $\log_{0.5} 6.7 < \log_2 4.3 < \log_2 5.6$   
C.  $0.5^{-6.7} > 2^{-5.6} > 2^{-4.3}$       D.  $0.5^{-6.7} < 2^{-5.6} < 2^{-4.3}$

2、The sum of two numbers is 6, the absolute value of their difference is 8, then the quadratic equation with roots of the two numbers should be

- A.  $x^2 - 6x + 8 = 0$       B.  $x^2 + 6x - 8 = 0$   
C.  $x^2 - 6x - 7 = 0$       D.  $x^2 + 6x + 7 = 0$

3、If  $M = \{x \mid 1 < x \leq 3\}$ ,  $N = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$ ,  $P = \{x \mid 0 < x \leq 4\}$ , then the number of integer in the set  $(M \cup N) \cap P$  is.

- A. 2      B. 3      C. 4      D. 5

4、Known  $f(x)$  is a linear function, and  $f(2) = 4$ ,  $f(3) = 1$ , then  $f(5) =$

- A. -5      B. 2      C. 3      D. 10

5、If  $f(2x) = \log_3(8x^2 + 7)$ , then  $f(1) =$  .

- A.  $\log_3 39$       B. 1      C.  $\log_3 15$       D. 2

6、The solution set of  $x^2 + 14 > -6(x - 5)$  is

- A.  $\{x \mid x < -8 \text{ or } x > 2\}$       B.  $\{x \mid -8 < x < 2\}$   
C.  $\{x \mid x < -2 \text{ or } x > 8\}$       D.  $\{x \mid -2 < x < 8\}$

7、The smallest positive period of  $y = \sin x(2 \sin x - \cos x) + 1$  is

- A.  $\frac{\pi}{2}$       B.  $\pi$       C.  $2\pi$       D.  $4\pi$

8、Assign 5 computers to 5 students, one computer for one student, student 1 must use computer 1, then the number of assignments is

- A. 4      B. 5      C. 24      D. 120

9、Given a sequence  $\{a_n\}$ ,  $a_n = \frac{1}{2n(n+1)}$  ( $n \in N^*$ ), find its sum of first 10 items.

- A.  $\frac{9}{10}$       B.  $\frac{9}{20}$       C.  $\frac{10}{11}$       D.  $\frac{5}{11}$

10、What is the relationship between the line  $3x - 4y + 3 = 0$  and the circle  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

- A. not intersect  
B. intersect and the centre of the circle is on the line.  
C. intersect and the centre of the circle is not on the line.  
D. the line is tangent to the circle

**Part 2: Calculation**

11、If  $\alpha \in (0, 2\pi)$ , and  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , then  $\cos 2\alpha =$

12、Known  $f(\sqrt{x} + 1) = x + 2\sqrt{x}$ , find  $f(x)$ .

13、Known that  $P$  and  $Q$  are the intersection points of the line  $y = x + 4$  and the ellipse  $3x^2 + y^2 = 28$ , find the equation of a circle with the diameter  $PQ$ .

14、Suppose that a sequence  $\{a_n\}$  satisfies  $a_{n+1} = a_n + n + 1$ ,  $a_1 = 3$ , find the sequence  $\{a_n\}$ .

15、Using mathematical induction, prove

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (n \text{ is any positive integer})$$