



澳門科技大學
MACAU UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

二零二四年入學考試
ADMISSION EXAMINATION 2024

M103 數學 MATHEMATICS

第一部份 選擇題。請選出每題之最佳答案。

1. 若 $M = \{x \mid x^2 + 2x - 3 \leq 0\}$, $N = \{x \mid -1 < x < 2\}$, 則 $M \cup N = (\quad)$ 。
- A. $[-3, -1)$ B. $(-1, 1]$ C. $[-3, 2)$ D. $(-1, 2)$ E. $[1, 2)$
2. 下列函數中, () 既是偶函數又是 $(0, \infty)$ 上的單調遞減函數。
- A. $y = \log_2 |x|$ B. $y = |2x - 3|$ C. $y = \cos 5x$
- D. $y = -2^x$ E. $y = -x^{2024}$
3. 已知 $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 那麼 $\sin 2\alpha = (\quad)$ 。
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{7}{9}$ E. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
4. 圓心為 $(-4, 3)$ 且過原點的圓的標準方程為 ()。
- A. $x^2 + y^2 = 25$ B. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$ C. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$
- D. $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ E. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$
5. 已知雙曲線 $\frac{x^2}{m+7} - \frac{y^2}{m+1} = 1 (m > 0)$ 的漸近線為方程 $x \pm \sqrt{3}y = 0$, 則 $m = (\quad)$ 。
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5
6. 如果 $a < b < c$, 那麼以下 () 正確。
- A. $a^2 < c^2$ B. $\left(\frac{1}{\pi}\right)^a < \left(\frac{1}{\pi}\right)^c$ C. $\frac{1}{a} > \frac{1}{c}$
- D. $\frac{1}{c-a} < \frac{1}{c-b}$ E. $\ln a < \ln b$
7. 等差數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 前 n 項和為 S_n 。若 $S_{10} = 35$, 則 $a_2 + a_9 = (\quad)$ 。
- A. 7 B. 5 C. 10 D. 13 E. 35
8. 如果 $a = 3b$ 以及 $c = \frac{a}{2}$, 那麼 $\frac{a+b+c}{a+b-c} = (\quad)$ 。
- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{2}$ E. $\frac{11}{5}$

9. 6 位同學排成兩排，每排 3 位，排法個數為 ()。
- A. 36 B. 72 C. 120 D. 720 E. 1440
10. 圓 $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$ 上的點到直線 $3x - 4y = 12$ 的距離最小值為 ()。
- A. $\frac{2}{5}$ B. 2 C. $\frac{8}{5}$ D. $\frac{7}{5}$ E. $\frac{3}{2}$
11. 已知 $2023^a = 2024$ ， $2024^b = 2023$ 以及 $c = \ln 2$ 。那麼以下不等式成立的是 ()。
- A. $c^a < c^b$ B. $\log_a c > \log_b c$ C. $\log_c a > \log_c b$
- D. $a^c < b^c$ E. $\log_a b > \log_c b$
12. 函數 $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ ($0 \leq x < 2\pi$) 取得最大值時， $x =$ ()。
- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{2}{3}\pi$ D. $\frac{5}{6}\pi$ E. $\frac{\pi}{4}$
13. 設多項式 $p(x)$ 除以 $x - 3$ 余 13，除以 $x + 2$ 余 3，則 $p(x)$ 除以 $x^2 - 6$ 余 ()。
- A. $2x + 3$ B. $3x + 2$ C. $2x + 7$
- D. $7x + 2$ E. $13x + 2$
14. 函數 $y = \frac{x^2 + 7x + 19}{x + 2}$ 的最小值為 ()。
- A. 2 B. 3 C. 5 D. 6 E. 9
15. 設 $f(x)$ 是週期為 4 的函數，且 $f(-2) = a$ ，則 $f(2022) =$ ()。
- A. $-a$ B. a C. 0 D. $2a$ E. $-2a$

Part I Multiple choice questions. Choose the *best answer* for each question.

1. Let $M = \{x \mid x^2 + 2x - 3 \leq 0\}$ and $N = \{x \mid -1 < x < 2\}$. Then $M \cup N = (\quad)$.
- A. $[-3, -1]$ B. $(-1, 1]$ C. $[-3, 2)$ D. $(-1, 2)$ E. $[1, 2)$
2. The function $(\quad)$ in the following is an even function and decreases on the interval $(0, \infty)$.
- A. $y = \log_2 |x|$ B. $y = |2x - 3|$ C. $y = \cos 5x$
- D. $y = -2^x$ E. $y = -x^{2024}$
3. Let $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Then $\sin 2\alpha = (\quad)$.
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $-\frac{7}{9}$ E. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
4. A circle is centered at $(-4, 3)$ and passes the coordinate origin. Then the standard form of the circle is $(\quad)$.
- A. $x^2 + y^2 = 25$ B. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$ C. $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$
- D. $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ E. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$
5. Suppose the equation of asymptotes of the hyperbola $\frac{x^2}{m+7} - \frac{y^2}{m+1} = 1$ ($m > 0$) is $x \pm \sqrt{3}y = 0$. Then $m = (\quad)$.
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5
6. If $a < b < c$, then $(\quad)$ is correct.
- A. $a^2 < c^2$ B. $\left(\frac{1}{\pi}\right)^a < \left(\frac{1}{\pi}\right)^c$ C. $\frac{1}{a} > \frac{1}{c}$
- D. $\frac{1}{c-a} < \frac{1}{c-b}$ E. $\ln a < \ln b$
7. Let the n -th partial sum of the arithmetic sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ be S_n . If $S_{10} = 35$, then $a_2 + a_9 = (\quad)$.
- A. 7 B. 5 C. 10 D. 13 E. 35
8. If $a = 3b$ and $c = \frac{a}{2}$, then $\frac{a+b+c}{a+b-c} = (\quad)$.
- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{2}$ E. $\frac{11}{5}$

9. The number of ways that 6 students are arranged into two rows, with 3 students in each row, is ().
- A. 36 B. 72 C. 120 D. 720 E. 1440
10. The minimum distance from points on the circle $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$ to the straight line $3x - 4y = 12$ is ().
- A. $\frac{2}{5}$ B. 2 C. $\frac{8}{5}$ D. $\frac{7}{5}$ E. $\frac{3}{2}$
11. Suppose $2023^a = 2024$, $2024^b = 2023$ and $c = \ln 2$. Inequality () in the following holds.
- A. $c^a < c^b$ B. $\log_a c > \log_b c$ C. $\log_c a > \log_c b$
- D. $a^c < b^c$ E. $\log_a b > \log_c b$
12. When the function $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$, $(0 \leq x < 2\pi)$ achieves its maximum value, $x = ()$.
- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{2}{3}\pi$ D. $\frac{5}{6}\pi$ E. $\frac{\pi}{4}$
13. Suppose a polynomial $p(x)$ leaves a remainder 13 when divided by $x - 3$, and a remainder of 3 when divided by $x + 2$. Then, the remainder of $p(x)$ when divided by $x^2 - 6$ is ().
- A. $2x + 3$ B. $3x + 2$ C. $2x + 7$
- D. $7x + 2$ E. $13x + 2$
14. The minimum value of the function $y = \frac{x^2 + 7x + 19}{x + 2}$ is ().
- A. 2 B. 3 C. 5 D. 6 E. 9
15. Let $f(x)$ be a function with a period of 4, and $f(-2) = a$. Then $f(2022) = ()$.
- A. $-a$ B. a C. 0 D. $2a$ E. $-2a$

第二部份 解答題。 Part II Problem-solving questions.

1. 已知約翰和安迪兩名籃球運動員投籃命中率分別為 0.6 和 0.8。

(a) 如果每個人各投籃一次，求約翰和安迪兩人中至少一人進球的概率。 (4 分)

(b) 如果兩人比賽，各投籃 2 次，求約翰戰勝安迪的概率。 (4 分)

Suppose that basketball players John and Andy have shooting percentages of 0.6 and 0.8, respectively.

(a) If each person takes one shot, calculate the probability that at least one of John and Andy scores a basket. (4 marks)

(b) If the two compete and each takes 2 shots, calculate the probability that John defeats Andy. (4 marks)

改卷專用 For examination paper marking only

2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ ， $\angle B$ 和 $\angle C$ 的對邊長分別為 a ， b 和 c 。已知 $\cos C + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{C}{2} = 0$ 。

(a) 求 $\angle C$ 的值。 (4 分)

(b) 若 $c = \sqrt{7}$ ， $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。求 a 和 b 的值。 (4 分)

In $\triangle ABC$, the lengths of sides opposite $\angle A$, $\angle B$ and $\angle C$ are a , b and c respectively. Suppose that $\cos C + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{C}{2} = 0$.

(a) Find the value of $\angle C$. (4 marks)

(b) If $c = \sqrt{7}$, the area of the $\triangle ABC$ is $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Find the value of a and b . (4 marks)

改卷專用 For examination paper marking only

3. 設拋物線 $C : y^2 = 2px$ 過點 $(2, 4)$ 且焦點為 F 。過點 F 的直線 ℓ 交 C 於 A, B 兩點。準線與對稱軸的交點為 M 。

(a) 求 p 的值。 (3 分)

(b) 證明 $\angle AMF = \angle BMF$ 。 (5 分)

Suppose the parabola $C : y^2 = 2px$ passes through the point $(2, 4)$ and its focus is F . A straight line ℓ passing through F intersects C at points A and B . The directrix intersects the axis of symmetry at the point M .

(a) Find the value of p . (3 marks)

(b) Prove that $\angle AMF = \angle BMF$. (5 marks)

改卷專用 For examination paper marking only

4. 設 $f(x) = (a+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \in \mathbb{R}$ 。

(a) 已知 $3a_3^2 = 5a_2a_4$, 求 n 的值。 (4 分)

(b) 若 $n = 2$, 且 $f(x) \geq x + 1$ 對於任意的 $x \in \mathbb{R}$ 成立。求 a 的範圍。 (4 分)

Let $f(x) = (a+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \in \mathbb{R}$.

(a) Suppose $3a_3^2 = 5a_2a_4$. Find the value for n . (4 marks)

(b) Suppose $n = 2$ and $f(x) \geq x + 1$ holds for all $x \in \mathbb{R}$. Find the range of a . (4 marks)

改卷專用 For examination paper marking only

5. 用數學歸納法證明： $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$ ， $n \in \mathbb{N}^+$ 。 (8 分)

Using mathematical induction to prove $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^+$. (8 marks)

改卷專用 For examination paper marking only
