

一种新的基于非线性相位的 Fourier 理论 及其应用

钱 涛

(澳门大学科技学院数学系, 澳门, 3001)

摘要: 信号的正频率表示自 Fourier 分析诞生以来一直都是物理学家、数学家以及信号分析工作者密切关注的问题. 基于调和分析和复分析方法, 在过去近二十年里诞生了单分量函数理论以及基于单分量函数的函数(信号)表示理论. 作为原创性理论这个方法将信号快速分解为一些具有正的非线性瞬时频率的基本信号之和. 该理论植根于经典数学并可以推广到定义在高维流形上的向量值及矩阵值信号. 这从而也创立了高维空间中的有理逼近理论. 单分量函数理论包括正瞬时频率的数学定义及几个最重要的单分量函数类的刻画. 单分量函数的表示理论包括核心自适应 Fourier 分解(Core Adaptive Fourier Decomposition, 或 Core AFD)及其若干变种, 包括解绕 AFD, 循环 AFD, 再生核 Hilbert 空间的预-正交 AFD. 除了理论及方法的概述, 本文也给出了两个新证明: 迄今最一般的依据极大选择原理的自适应分解的收敛性的证明; 以及参数重复选择的及用到再生核导数的必要性的证明. 最后我们给出该理论与数学及信号分析中若干相关理论的联系, 以及该方法的某些应用.

关键词: Blaschke 乘积; 单分量函数; Hardy 空间; 内函数和外函数; 自适应 Fourier 分解; Beurling-Lax 定理; 再生核 Hilbert 空间

MR(2010) 主题分类: 42A50; 32A30; 32A35; 46J15 / **中图分类号:** O1-0; O17; O23; O29

文章标识码: A **文章编号:** 1000-0917(2018)03-0321-27

0 引言

分析学者认为“单位圆周上的研究是调和分析, 而单位圆周内部是复分析”, 这种理解对于任意流形以及以它为边界的区域上的函数论的研究都是适用的. 一般来说, 我们所依据的主要的方法论可以被看作是调和分析的复分析方法. 例如, 当研究定义在一个 n 维流形上的函数时, 我们可以把这个 n 维流形嵌入到一个 $n+p$ 维的 Euclidean 空间中, 后者带有单复变或多复变量、或四元数、或八元数、或 Clifford 代数的 Cauchy 复结构, 即具有包括 Cauchy 定理、Cauchy 核及 Cauchy 积分公式在内的复结构. 利用空间中的复结构, 我们在由流形划分出的区域中定义由“好的”复解析函数构成的复 Hardy 空间. 这里我们用“好的”来特指定义在区域上的复 Hardy 函数存在非切向极限, 把这一极限作为其对应的定义在流形上的函数空间中的投影. 反过来, 定义在流形上的一个恰当的函数空间中的每一个函数都对应一个 Hardy 非切向边界极限, 这个极限也被叫做解析信号. 这些想法曾出现在程民德和邓东皋 1979 年在北京大学所做的演讲、由陈建功翻译的 Gorusin 的著作(见 [36])、McIntosh, Kenig 以及其他学者各自的涉及到复 Hardy 空间、奇异积分、边值问题及定义在 Lipschitz 曲线和曲面上的相关讨论的研究工作中. 本文作为一篇概述, 主要介绍作者和他的合作者们利用复分析方法进行调和分析和信号分析的工作.

收稿日期: 2018-04-17.

基金项目: 澳门大学 Multi-Year Research Grant (MYRG) (No. MYRG2016-00053-FST) 和澳门政府自然和科技基金 (No. FDCT 079/2016/A2).

E-mail: fsttq@umac.mo

这些研究成果可以分成两部分,一部分是单分量函数理论,研究具有非负瞬时频率函数的信号;另一部分是用合适的单分量函数逼近任意函数.注意到单项式 z^n ($n = 0, 1, \dots$) 是特殊的单分量函数,所以 Fourier 级数是最经典的单分量或正频率表示.我们将探讨将 Fourier 理论推广到 Hardy 空间的 Beurling-Lax 定理相关的直和分解,以及与其有关的向前和向后平移之不变子空间的理论.

这些研究的动机最初来源于 Gabor (见 [30]) 对于瞬时频率这一概念或者简单叫做频率函数 (IF) 给出的一个意向性的定义.直到现在,对于物理学及信号分析理论和工程人员来讲它仍旧是一个有争议的概念.人们通常认为一个一般信号在任一时刻都有一个确定的“频率”.具有恒定频率的三角函数的存在似乎是支持这一想法的判据.频率函数存在的证明关键取决于如何定义 IF.不幸的是,除三角函数以外,IF 这个概念本身是自相矛盾的:“频率”是单位时间内的振动次数(或者平均振动次数),因此要确定它需要一个时间区间;但“瞬时”只涉及到一个时刻.相比之下,瞬时(即时)速度的概念是简单的,因为在任意小的时间间隔中总有物体移动的路程;但是在任意小的时间间隔中不存在有运动物体往返振动的次数,后者在充分大的时间间隔中才有意义.在数学家、物理学家和信号分析学家范围内,没有任何理论和应用给出令人满意的定义(见 [6, 9]).作者的信念是对于一个一般的信号可能不存在一个预期的 IF 的定义.然而,我们可以基于那些可以被有效分析的信号给出一个瞬时频率的数学上和概念上的定义.我们给出的 IF 的定义基于 Möbius 变换,它有着适合用来定义 IF 的数学之美.对于数学家,本文所给出的定义是自然且唯一的.特别地,一位国际应用调和分析领袖称这种由 Möbius 或 Blaschke 乘积,或更一般地由 Nevanlinna 内函数给出的瞬时频率是“by God”.这样,一个与经典数学有深刻和精妙联系以及在应用上有巨大潜力的理论初步形成.作为 Fourier 分析推广的一个新的方向,它重点讨论非线性相位并且包括两个部分:定义 IF 这一概念;以及将信号分解为那些具有 IF 的信号的和.我们称具有 IF 函数的信号为单分量函数(或者 MC).不具有 IF 的那些信号称为多分量函数.有一些经典的函数类是单分量函数.也有一些新构造出来的有趣的并且有重要意义的单分量函数.单分量函数理论是由调和分析 and 信号分析学者共同努力的成果(见 §1 以及参考文献中的相关著作).

G. Weiss 和 M. Weiss 曾在 1962 年发表过一篇文章重新证明了单复变的复 Hardy 空间中的 Nevanlinna 因子分解定理 ([100]). 基于该结果, Nahon 于 2000 年在 Coifman 的指导下在耶鲁大学的博士毕业论文中提出了一个非线性相位的解绕算法 (Unwinding Blaschke Expansion, 或 UWE), 这一算法将解析信号分解成一系列 Blaschke 乘积的和 (见 [55]). 在 2016 年的论文 [11] 中, Coifman 和 Steinerberger 正式地发表了 UWE 理论和算法, 其后这些作者和 H.-T. Wu 一起将解绕算法及对于 IF 的计算方法 (见 [12]) 实施于能量有限信号. 最近 Coifman 和 Peyrière 的一篇文章研究了包括解绕序列 Schauder 基性质在内的不变子空间性质 (见 [10]). 本文作者独立地研究了 UWE 方法并且在文献 [62] (2010) 中证明了 H^2 的收敛性, 同时也在文献 [70] (2013) 中巧合地使用了英文单词 “unwinding” 来命名它. 我们注意到 UWE 是 UWAFD 的一个特例, 后者运用 Nevanlinna 内、外函数分解定理外还结合广义后移算子的筛选过程运用了最大选择原理 (见 [62, 77]).

如前文所述, 解绕算法只是自适应逼近方法论中两个主要思想及处置中的一个. 另外一个所谓的最大选择原理 (Maximal Selection Principle 或 MSP). 事实上, 术语 “自适应 Fourier 分解” (Adaptive Fourier Decomposition, 或 AFD) 最初就是从 MSP 类型开始的, 并进一步拓展

到 UWE 类型, 而后者也具有自适应性. 一维最大选择型 AFD, UWE 以及 UWAFD (统称为 AFD 方法) 都关键性地依赖单复变函数的因子分解性质. 对于多个变量的情形, 无论是多复变还是 Clifford 代数, 一维 AFD 方法都不能直接被运用. 在我们最新的研究中, 我们将最大选择型 AFD 的思想扩展到具有某种边界趋零性质的再生核 Hilbert 空间, 开发出预-正交 AFD 算法, 或简称为 POAFD. 单分量函数理论和相关的 AFD 逼近理论已经找到了重要及有效的应用, 包括系统辨识、信号和图像处理等等 (见 [21, 51, 52, 81, 108]). 我们也将介绍及在文献中包含一些工程方面的应用.

本文的撰写结构如下. 在 §1 中我们介绍单分量函数理论的主要结果, 包含了单分量函数的定义, 内函数型、Bedrosian 型以及星型及边界星型的单分量函数. 在 §2 中我们给出若干 AFD 算法变种, 包括经典及再生核 Hilbert 空间两种情况. 在 §3 中我们提供相关研究工作及其应用的信息.

1 单分量函数理论

1.1 单分量和 IF

1946 年 Gabor 提出了他的解析信号方法 (见 [32]). 在本文中, 我们只限定研究能量有限信号或者叫 L^2 函数. 单位圆周上的理论与实数轴上的理论是类似的. 为了解释整个想法, 大部分情况下我们都介绍单位圆周的情形. 偶尔我们会跳到上半空间的场合中, 例如我们从 Fourier 变换的角度来描述有关 Bedrosian 型的结果的时候. 设 $s(t)$ 是定义在单位圆周 $\partial\mathbf{D}$ 上的实值的能量有限信号, 其中 \mathbf{D} 代表单位圆盘. 与之对应的解析信号, 记为 $s^+(t)$, 定义为

$$s^+(e^{it}) = \frac{1}{2}(s(e^{it}) + i\tilde{H}s(e^{it}) + c_0), \quad (1.1)$$

其中 \tilde{H} 是圆周上的 Hilbert 变换, c_0 是第 0 个 Fourier 系数, 也是 s 在圆周上的平均值. 即

$$\tilde{H}s(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \text{p.v.} \int_0^{2\pi} f(e^{iu}) \cot\left(\frac{t-u}{2}\right) du, \quad c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{iu}) du.$$

我们注意到 s^+ 是 s 的 Cauchy 积分的非切向边界极限 (Plemelj 公式):

$$s^+(e^{it}) = \lim_{z \rightarrow e^{it}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{iu})}{z - e^{iu}} e^{iu} du, \quad \text{a.e.}$$

由于 s 是实值的信号, (1.1) 中的 Hilbert 变换部分 $\frac{1}{2}\tilde{H}f$ 恰好是 s^+ 的虚部, 并且 $s = 2\text{Re } s^+ - c_0$. 在单位圆周场合, 对应于 Laplace 变换的以下关系式成立:

$$s^+(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

重要的一点是 $s^+(e^{it})$ 是在圆盘内部的一个 Hardy $H^2(\mathbf{D})$ 空间函数的边界值:

$$s^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad |z| < 1,$$

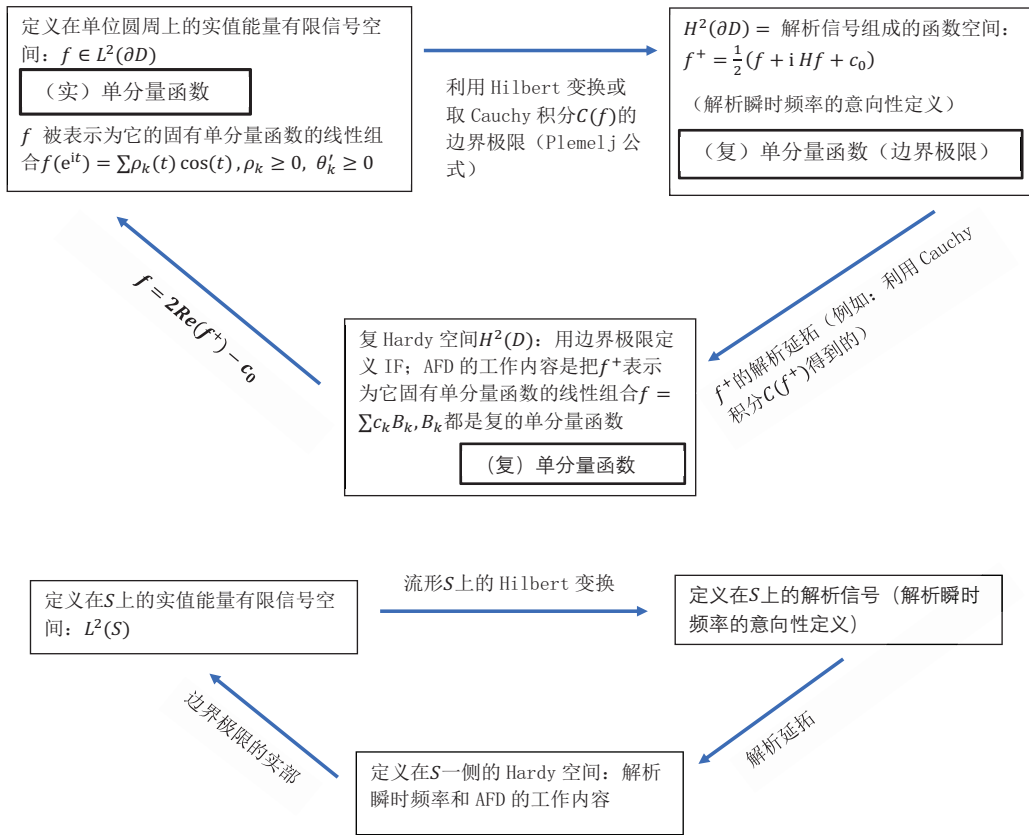


图 1 分析信号中的复调和解析方法

或说 $s^+(z)$ 是 $s^+(e^{it})$ 向圆内的解析延拓. 圆周上的 Hilbert 变换的 Fourier 乘子是 $-i \text{sgn}$, 即, 如果

$$s(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(e^{iu}) e^{-iku} du,$$

其中, 当 $k > 0$ 时, $\text{sgn}(k) = 1$; 当 $k < 0$ 时, $\text{sgn}(k) = -1$; 且 $\text{sgn}(0) = 0$. 那么有

$$\tilde{H}s(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-i) \text{sgn}(k) c_k e^{ikt}.$$

之后的书写中我们省去符号 \tilde{H} 中的波浪线, 简写作 H .

Hilbert 变换的这种 Fourier 乘子的表示形式引出了 Hardy 空间上的 Hilbert 变换的特征. 如果限制在 L^2 的情况下, 就是: 一个能量有限信号 s 属于 Hardy H^2 空间当且仅当 $Hs = -is$ (见 [58]). 类似的结果在包括上半平面空间在内的一维或是高维的一般情况下都成立 (见 [17-19]).

在表达式 $s^+(e^{it}) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ 中, Gabor 定义相位函数的导数 $\theta'(t)$ 作为 $s(e^{it})$ 的瞬时频率. 这个定义是沿着正确的方向. 因为如果我们对正整数 n 以 $s(e^{it}) = \cos(nt)$ 为例, 那么此时

$s^+(e^{it}) = e^{int}$, 相位导数为 n , 这与常识相一致. 然而, 由于以下的原因 Gabor 的定义对于一般的信号 $s \in L^2(\partial\mathbf{D})$ 是无效的. 首先, s 以及 s^+ 均为 Lebesgue 平方可积函数的等价类, 无所谓光滑, 也不会有相位导数; 其次假如导数是存在的, 也不能期望它如物理中所期待的那样是非负的, 故不能作为一个合适的瞬时频率函数. 信号分析学者们决定了 IF 一定是非负的, 从而可以被有效地用在实际问题的分析中: 瞬时频率的概念来自物理的实践, 它是振动频率概念的延伸. 在平均意义下, 一个解析信号的相位导数是非负的可以从以下关系式中得出:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta'(t) |s^+(e^{it})|^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} k |c_k|^2$$

(见 [9, 24]). 然而, 从点态意义下看, 一个解析信号的相位导数有可能是负的. 例如, 对于任意非平凡的复的 Hardy 空间上的外函数, 我们可以找到一个具有正的 Lebesgue 测度的集合, 使得信号在该集合上的相位导数严格地小于 0.

一个解决问题的策略是定义一个正好包含所有可以定义出非负解析相位导数的信号或函数的集合. 这个函数集合就叫单分量函数集.

定义 1.1 [60] 设 s 是一个定义在单位圆周上的实值的或者复值的能量有限信号. 我们称 s 为一个单分量函数, 或实的单分量函数, 如果它的解析信号, 或者它在 Hardy 空间 H^2 中的投影, 也就是 $s^+(t) = \frac{1}{2}(s(t) + iHs(t) + c_0)$ 的幅相表示 $s^+(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ 满足条件 $\theta'(t) \geq 0$, a.e., 其中相位导数 $\theta'(t)$ 是用从内部区域到边界的非切向极限来定义的, 假如后者存在的话. 具体来说, 在单位圆周的情况下,

$$\theta'(t) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \theta'_r(t), \quad \text{a.e.},$$

其中 $s^+(re^{it}) = \rho_r(t)e^{i\theta_r(t)}$ 是在单位圆盘内部的解析延拓. 当 s 是单分量时, 我们也称 s^+ 为复的单分量或者就简称为单分量. 当且仅当 s 是一个单分量时它才有瞬时频率函数, 后者就定义为它的非负的解析相位导数 $\theta'(t)$.

这个定义表明, 并不是每一个解析信号都有完好定义的相位导数, 也不是每一个有完好定义的相位导数的函数都是单分量函数. 只有单分量函数才具有完好定义的瞬时频率.

由于 s^+ 是一个 Hardy 空间函数从单位圆盘内部的非切向极限, $\theta'_r(t)$ 处处存在, 且

$$\theta'_r(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{re^{it} s^{+'}(re^{it})}{s^+(re^{it})} \right\}.$$

我们注意到单分量函数类关于乘法运算是封闭的但对于加法运算并非封闭.

1.2 内函数型的单分量

上述的定义包罗了许多有趣的单分量函数类. 首先我们将提到内函数类. 很显然将 $a \in \mathbf{D}$ 映射到零的规范 Möbius 变换的边界函数

$$e_a(e^{it}) = \frac{e^{it} - a}{1 - \bar{a}z} = e^{i\theta_a(t)}$$

是相位导数 θ'_a 等同于圆盘上的 Poisson 核的解析信号 (见 [32, 59, 67]). 湛秋辉和李落清参与了这部分结果的早期研究. 这表明了有限的 Blaschke 乘积是单分量. 问题是无穷乘积项 Blaschke

乘积是否是单分量. 作为 Julia-Wolff-Carathéodory 定理的一个应用, 以下关于一般的内函数 (包含有限及无穷项的 Blaschke 乘积以及奇异内函数) 的结果已经得到证明 (见 [61]).

定理 1.1 [61] 设 θ 是一个定义在单位圆周上的实值的 Lebesgue 可测函数. 那么相位函数 $e^{i\theta}$ 是一个单分量当且仅当 $e^{i\theta}$ 是一个解析函数的非切向边界极限, 或者说等价于, 当且仅当 $H(e^{i\theta}) = -ie^{i\theta}$.

早期在 [95] 中的研究给出了有鼓舞性的观察和部分结果. 我们注意到在前期的数字信号处理 (DSP) 文献中, 已经在运用 Blaschke 乘积有正的相位导数函数但没有给出有效的证明 (见 [8]). DSP 的学者和工程师一直以来都基于具有最小相位的物理可实现信号等同于外函数之结果, 但从未有人给出严格的证明. 最小相位现象是基于所有内函数的边界值都有非负的相位导数这一事实. 文献 [61] 证明了外函数的对立的性质: 在保证外函数的相位导数函数 $\theta'(t)$ 存在的相对宽松的条件下, 有

$$\int_0^{2\pi} \theta'(t) dt = 0.$$

这样, 内函数和外函数可以用它们的相位导数的符号性质来刻画.

1.3 Bedrosian 型的单分量函数

Bedrosian 型的单分量函数被称为第二类单分量函数. 经典的 Bedrosian 定理断言了以下关系式

$$H(fg) = fHg$$

在两种条件下成立, 这两种条件都是基于函数的 Fourier 频谱性质的. 第一种条件是存在 $\sigma > 0$ 使得 $\text{supp } \hat{f} \subset [-\sigma, \sigma]$ 并且 $\text{supp } \hat{g} \subset (-\infty, \sigma] \cap [\sigma, \infty)$. 第二种条件是 f 和 g 都是 Hardy H^2 空间中的函数. 在 Fourier 频谱的理论中, 运用关于 Hardy 空间函数的 Paley-Wiener 定理, 第二种条件等价于 $f, g \in L^2$, $\text{supp } \hat{f} \subset [0, \infty)$ 且 $\text{supp } \hat{g} \subset [0, \infty)$. 使用 Bedrosian 型的结果的想法如下所述. 假设 $e^{i\theta}$ 是一个解析信号, 且有性质 $\theta'(t) \geq 0$, a.e. 到目前为止, 这样的函数已经可以用定理 1.1 来刻画. 我们希望找到一个非负的函数 $\rho(t)$ 使得 Bedrosian 型的关系式 $H(\rho(t)e^{i\theta}) = \rho H(e^{i\theta})$ 成立. 对这样的函数 ρ 接续有

$$H(\rho e^{i\theta}) = \rho H(e^{i\theta}) = (-i)\rho e^{i\theta}.$$

联想一下 Hardy 空间函数的 Hilbert 变换刻画, 可知上面的等式意味着 $\rho e^{i\theta}$ 是一个解析信号, 并且因为相位导数 $\theta'(t)$ 的正性, $\rho e^{i\theta}$ 是一个单分量.

然而, 经典的 Bedrosian 定理并不能直接使用. 第一种条件涉及到函数 f 和 g 的频带位置. 不巧的是, 这不是我们所讨论的情形: 内函数 g 是具有完全的 Fourier 谱范围的. 第二种条件需要函数的幅度恰好是某一 Hardy 空间函数的边界极限. 这也不是我们讨论的情形 (参见下文 (1.2) 中例子).

为了理解及发现更多的单分量函数, 中国的调和分析与信号分析学者主导发起了 Bedrosian 等式的新探索 (例如, 见 [73, 76, 89, 98, 105]). 其中之一有代表性的结果受到了下述观察的启发.

Bedrosian 型的单分量函数的基本结构如下:

$$s(e^{it}) = \left(\frac{1}{1 - \bar{a}_1 e^{it}} + \frac{1}{1 - a_1 e^{-it}} \right) \frac{e^{it} - a_1}{1 - \bar{a}_1 e^{it}} \frac{e^{it} - a_2}{1 - \bar{a}_2 e^{it}}. \quad (1.2)$$

(1.2) 式所给出的函数是一个圆内有界解析函数的边界极限. 首先, 在圆周上它是一个实值函数乘以一个 2 阶的 Blaschke 乘积的形式. 为了证实 $s(e^{it})$ 是 Bedrosian 型的单分量函数, 关键问题是说明

$$\frac{1}{1 - \bar{a}_1 z} \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z}$$

在圆盘上是一个解析函数; 另外对 $|z| = 1$, 乘积

$$\frac{1}{1 - a_1 \bar{z}} \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \frac{z - a_2}{1 - \bar{a}_2 z}$$

在圆盘内部有一个解析延拓. 因此, $s(z)$ 是一个有界解析函数. 由于 $\frac{1}{1 - \bar{a}_1 e^{it}} + \frac{1}{1 - a_1 e^{-it}}$ 是实值的且在 $|z| = 1$ 有有限多个变符号点, 故称它为定义在圆周上的广义幅度. 我们得到了以下结论 (见 [73], 有限阶的 Blaschke 乘积的情形在 [92] 中给出证明).

定理 1.2 令 $\phi(e^{it})$ 是一个有有限或无穷多乘积项的 Blaschke 乘积, 其中 a_1, \dots, a_n, \dots 是它零点的全体, 重数也计算在内. 那么

(1) $\rho(t)$ 是满足 $\rho(t)\phi(e^{it}) \in H^p(\partial\mathbf{D})$ ($1 \leq p \leq \infty$) 的实值函数当且仅当 ρ 是由 Blaschke 乘积 $\phi(e^{it})$ 诱导的后移不变子空间中的某一函数的实部, 即 $\rho \in \text{Re}\{H^p(\partial\mathbf{D}) \cap \overline{\phi(e^{it})H^p(\partial\mathbf{D})}\}$;

(2) 对于满足 $1 < p < \infty$ 的实数 p , $\rho \in \text{Re}\{H^p(\partial\mathbf{D}) \cap \overline{\phi(e^{it})H^p(\partial\mathbf{D})}\}$ 成立当且仅当在 L^p 范数的意义下,

$$\rho(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k B_k(e^{it}) \right\},$$

其中 $c_k = \langle \rho(t), B_k(e^{it}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(t) \overline{B_k(e^{it})} dt$, $k = 1, 2, \dots$, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是由 a_1, \dots, a_k, \dots 生成的有理正交系统 (或 TM- 系统), 即

$$B_k(z) = \frac{\sqrt{1 - |a_k|^2}}{1 - \bar{a}_k z} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{z - a_l}{1 - \bar{a}_l z}. \quad (1.3)$$

1.4 非 Bedrosian 型的单分量函数: 星形和边界星形函数型

单分量的第三种类型称为非 Bedrosian 型, 其中包括了单复变函数中的 p - 星形函数以及边界星形函数. 这种单分量探究了单分量和保形映射之间的联系. 记 f 是满足 $f(0) = 0$ 的单叶的保形映射, 定义域为单位圆盘和它的连续可求长边界. 显然, $f(e^{it})$ 是复的单分量, 因为它的相位函数随着自变量幅角 t 的递增而递增. 下面我们用 S^* 来记所有这样的星形函数的集合. 接着我们定义包含下面的 p - 星形函数在内的几个其它的类似的函数类.

定义 1.2 设 p 是任一正整数. 记 $S(p)$ 为满足下面条件的 p - 叶全纯函数的集合

(i) 存在 $r: 0 < r < 1$, 使得对所有的 $z: r < |z| < 1$, $\text{Re}\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > 0$ 成立;

(ii) $\int_0^{2\pi} \text{Re}\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} dt = 2p\pi$ 对所有的 $z: r < |z| < 1$ 成立.

属于集合 $S(p)$ 的函数我们称之为 p - 星形函数.

定义 1.3 函数 f 被称为弱的 p - 星形函数, 记为 $f \in S_w(p)$ 当且仅当它在 \mathbf{D} 上全纯, 在 \mathbf{D} 上恰好有 p 个零点 (已包含重数), 且有表达式

$$f(z) = [h(z)]^p \prod_{k=1}^p \frac{(z - a_k)(1 - \bar{a}_k z)}{z},$$

其中 $h \in \mathcal{S}^*$.

当 $p = 1$ 并且 $a_1 = 0$ 时, 我们有 $\mathcal{S}_w(1) = \mathcal{S}(1)$. 文章 [37] 说明了 $\mathcal{S}(p)$ 是 $\mathcal{S}_w(p)$ 的一个真子集. 后者的优势在于 $\mathcal{S}_w(p)$ 中的函数有明晰的解析表达式. 为了方便地证明有广泛意义的结构性定理, 我们假设所研究的函数在闭的单位圆盘的一个开邻域上有解析延拓. 记这类全纯函数组成的集合为 \mathcal{A} , 可以证明 $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}(p) = \mathcal{A} \cap \mathcal{S}_w(p)$ (见 [73]). 为了描述单分量函数和星形函数族之间的关系, 我们还需要引入两个定义.

定义 1.4^[46] 一个单叶函数 f 被称为一个相对于零点的边界星形函数, 如果 f 在 \mathbf{D} 上全纯, $\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r) = 0$, $f(\mathbf{D})$ 是相对于原点的星形区域, 并且对于某个实数 α 和所有的 $z \in \mathbf{D}$, $\operatorname{Re}\{e^{i\alpha} f(z)\} > 0$. 记 \mathcal{G}^* 为所有相对于零点的边界星形函数的类.

下面的定义确定了一个单分量函数的类.

定义 1.5 令 $f(e^{it}) = \rho(t)e^{i\theta(t)} \in L^p(\partial\mathbf{D})$, $p \geq 1$. 则 f 被称为一个 Hilbert- n , 或者 H - n 原子, 如果它满足条件:

- (1) $H(\rho \cos \theta) = \rho \sin \theta$;
- (2) $\rho \geq 0$, $\theta' \geq 0$ a.e.;
- (3) $\int_0^{2\pi} \theta'(t) dt = n\pi$.

其中, 注意到, 因为 (1), f 是定义在开单位圆盘内某一复 Hardy 空间函数的边值. 在 (2) 中的相位导数 θ' 满足定义 1.1 中的要求. 条件 (3) 涉及到了 f 的多叶性, 即周期性. H - p 原子这一概念首次出现在 [60] 中, 在那里 $p = 2$. 该文章指出 f 是一个 H -2 原子当且仅当 f 是一个相对于原点的星形函数. 进一步的有关 $p = 2n$ 的结果在 [92] 中给出. 下面的结论最终给出了 H 原子与星形—边界星形函数之间的关系.

定理 1.3 令 f 在 $\overline{\mathbf{D}}$ 上全纯, 在开单位圆盘 \mathbf{D} 上有 p 个零点. 则 $f(e^{it})$ 是一个 H - n 原子, $n \geq 1$, 当且仅当

$$f^2(z) = \left[\prod_{i=1}^p h_i(z) \right]^2 \prod_{j=1}^{n-2p} g_j^2(z) = \left[\prod_{k=1}^p (z - a_k) \left(\frac{1}{z} - \bar{a}_k \right) \right]^2 \left[\prod_{k=1}^{n-2p} (z - b_k) \left(\frac{1}{z} - \bar{b}_k \right) \right] [h(z)]^n,$$

这里 $\{a_k\}_{k=1}^p$ 是 $f(z)$ 在单位圆盘中的零点, $\{b_k\}_{k=1}^{n-2p}$ 是 $f(z)$ 在单位圆周上的零点 (二者都可能具有重度), $h(z) \in \mathcal{S}^*$, $h_i \in \mathcal{S}_w(1)$, 和 $g_j(b_j z) \in \mathcal{G}^*$ 都在 $\overline{\mathbf{D}}$ 上全纯, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, n-2p$.

所有有关这三种类型, 即内函数型, Bedrosian 型和星形函数型的单分量函数的研究结果不仅是单分量理论中的重要结论, 也是对经典调和分析和复分析中相关知识的新理解.

2 自适应 Fourier 分解

这一节我们将给出对于自适应 Fourier 分解 (AFD) 的描述性介绍. 在单复变的情形下, AFD 得出了信号的解析有理函数类型的正频率展开; 而在高维的情形下, AFD 到目前为止也已经给出了快速收敛的有理逼近.

2.1 一般信号的单分量函数分解

信号的正频率分解并不是新提出的概念, 它可以溯源到两百多年前的学者 Joseph Fourier 以及其他学者的研究. Fourier 级数也正是我们要展示的一般化的理论的一个特殊情况.

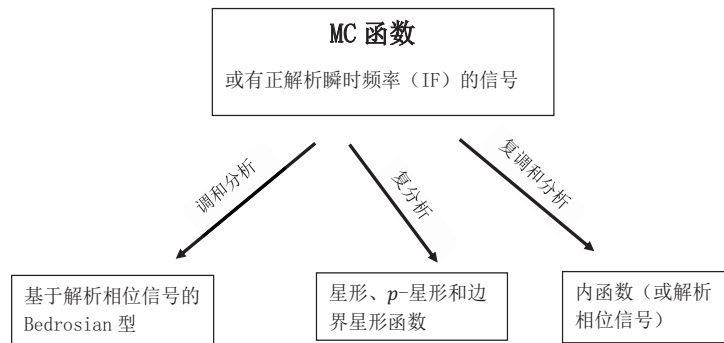


图 2 单分量函数的基本类型

设 s 是定义在单位圆周 $\partial\mathbf{D}$ 上的能量有限的实值信号. 它的 Hardy H^2 空间投影是 $s^+ = \frac{1}{2}(s + iHs + c_0)$. 关系式 $s = 2\text{Re}\{s^+\} - c_0$ 说明一个复的单分量分解 $s^+(e^{it}) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(t)e^{i\theta_k(t)}$ (系数 c_k 可以由对应的幅度 ρ_k 和相位 θ_k 得出) 同时也给出了一个 s 的实的单分量分解或者叫正频率分解: $s(e^{it}) = -c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(t) \cos \theta_k(t)$. 因此, 问题简化为对 Hardy 空间函数 s^+ 的分解.

所依据的哲学是要找出有正时变频率的内蕴构造模块. 这里“内蕴”有深刻的含义. 在当前的处置下它可理解为“收敛快的”. 在 [69] 中我们说明了对任意的 Hardy 空间函数 s^+ 和任意的 $\epsilon > 0$, 存在一个常数 c 和两个 1- 星形函数 m_1 以及 m_2 使得下式成立:

$$\|s^+ - (c + m_1 + m_2)\| \leq \epsilon;$$

这两个星形函数 m_1 和 m_2 不是唯一的, 并且根据它们的构造方式可知非常不规则. 更深一层考量指出, 最好使用由有明确表达式的性质较好的某种类型的单分量函数构成的函数系统, 最好不同分解层次的瞬时频率是依层次递增的.

2.2 一维的核心—自适应 Fourier 分解 (Core-AFD) 和它的一些变种

研究者们并未犹豫很久就决定使用有理正交系统或 TM 系统. 但与传统的 TM 系统的用法迥然不同: 它必须是自适应的. 由于内蕴构造被理解为快速收敛, 我们必须选择参数. 有理正交或 TM 系统已在定理 1.2 中被定义. 应注意到, TM 系统是不可避免的. 它们是极点在闭的单位圆盘外部的部分分式的 Gram-Schmidt (G-S) 正交化的结果, 而这样的有理分式是 Hardy 空间中的有理函数的基础构造模块. 根据 (有限) Blaschke 乘积的构造方式可知 TM 系统由具有正频率的函数组成 (有时要求 $a_1 = 0$).

之后的叙述我们将 Hardy $H^2(\mathbf{D})$ 中函数 s^+ 的记号换成 f . 在单位圆周的情形下, $f(z) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l z^l$, $\sum_{l=1}^{\infty} |c_l|^2 < \infty$. 现在我们寻求 f 的一个由自适应地选择的参数所定义的 TM 系统的表达方法. 函数集

$$e_a(z) = \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in \mathbf{D}$$

由单位圆盘上的单位模 Szegő 核组成. 令 $f = f_1$. 首先改写 f 为

$$f(z) = \langle f_1, e_{a_1} \rangle e_{a_1}(z) + \frac{f_1(z) - \langle f_1, e_{a_1} \rangle e_{a_1}(z)}{\frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z}} \frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z}.$$

注意到在这一步, 上式是一个恒等式, 而 a_1 可以是单位圆盘内的任意复数. 记

$$f_2(z) = \frac{f_1(z) - \langle f_1, e_{a_1} \rangle e_{a_1}(z)}{\frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z}},$$

称其为导出误差, 于是该等式改写为

$$f(z) = \langle f_1, e_{a_1} \rangle e_{a_1}(z) + f_2(z) \frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z}. \quad (2.1)$$

我们把将 f_1 映射到 f_2 的算子称为广义的 a_1 -后移算子, 把 f_2 称为 f_1 的广义 a_1 -后移项. 这些推广概念都来自于经典后移算子

$$S(f)(z) = a_1 + a_2 z + \cdots + c_{k+1} z^k + \cdots = \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

认识到 $f(0) = \langle f, e_0 \rangle e_0(z)$, S 其实是广义的 0-后移算子.

我们知道 Szegő 核是在弧长测度下的 Cauchy 核, 故它有再生核性质. 由于 Hilbert 空间中的正交性和 Möbius 变换的复数单位模性质, 我们可以得出以下能量关系

$$\|f\|^2 = \|\langle f_1, e_{a_1} \rangle e_{a_1}\|^2 + \|f_2\|^2 = (1 - |a_1|^2) |f_1(a_1)|^2 + \|f_2\|^2.$$

现在, 目标是从项 $\langle f_1, e_{a_1} \rangle e_{a_1}(z)$ 中提取出最大能量. 由上式, 这已被简化为在 $a_1 \in \mathbf{D}$ 范围内最大化 $(1 - |a_1|^2) |f_1(a_1)|^2$. 虽然 \mathbf{D} 是个开集, 幸运的是在 \mathbf{D} 中存在 a_1 使得

$$a_1 = \arg \max\{(1 - |a|^2) |f_1(a)|^2 : a \in \mathbf{D}\}$$

(见 [77]). 这个最大选择的存在性及实施被称作最大选择原理. 选取满足这样条件的 a_1 然后对 f_2 重复进行这一操作, 并接续进行下去. 我们称通过一个最大选择的 a_1 从 f_1 得到 f_2 的过程为经由 a_1 从 f_1 到 f_2 的最大筛选. n 次最大筛选之后, 我们有

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \langle f_k, e_{a_k} \rangle B_k(z) + f_{n+1} \prod_{k=1}^n \frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z},$$

其中对 $k = 1, \dots, n$,

$$a_k = \arg \max\{(1 - |a|^2) |f_k(a)|^2 : a \in \mathbf{D}\},$$

$$B_k(z) = B_{\{a_1, \dots, a_k\}}(z) = \frac{\sqrt{1 - |a_k|^2}}{1 - \bar{a}_k z} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{z-a_l}{1-\bar{a}_l z},$$

并且, 对 $k = 2, \dots, n+1$, f_k 是 f_{k-1} 的经由 a_{k-1} 的最大筛选, 也就是说

$$f_k(z) = \frac{f_{k-1}(z) - \langle f_{k-1}, e_{a_{k-1}} \rangle e_{a_{k-1}}(z)}{\frac{z-a_{k-1}}{1-\bar{a}_{k-1} z}}.$$

我们给出以下收敛性定理.

定理 2.1 给定 Hardy H^2 空间函数 f , 通过在每一步迭代中应用最大筛选程序, 我们得到

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_k, e_{a_k} \rangle B_k(z).$$

这一结果首次在文献 [77] 中基于 Möbius 变换的复模 1 的性质得到了证明. 下面我们抛开复数模 1 这一条件, 给出仅仅依赖参数的最大选择的一个新证明. 这一证明的精髓包含在了专著 [63] 多处以及 [82] 中.

证明 我们用反证法来证明收敛. 假设通过一系列最大选择的参数 $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ 我们得到

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_k, e_{a_k} \rangle B_k + h, \quad h \neq 0. \quad (2.2)$$

由 Bessel 定理及 Riesz-Fisher 定理可知, $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f_k, e_{a_k} \rangle B_k$ 和 h 都在空间 H^2 中. 从 Hilbert 空间的性质可知 h 正交于所有的 B_k , 从而正交于 $\sum_{k=1}^{\infty} \langle f_k, e_{a_k} \rangle B_k$.

式 (2.2) 可以改写成

$$f = \left(\sum_{k=1}^M + \sum_{k=M+1}^{\infty} \right) \langle f_k, e_{a_k} \rangle B_k + h,$$

这里我们记

$$g_{M+1} = \sum_{k=M+1}^{\infty} \langle f_k, e_{a_k} \rangle B_k + h = G_{M+1} + h.$$

接下来, 我们注意到

$$\langle f_k, e_{a_k} \rangle = \langle f, B_k \rangle = \langle g_k, B_k \rangle, \quad (2.3)$$

其中 $g_k = f - \sum_{l=1}^{k-1} \langle f_l, e_{a_l} \rangle B_l$ 是第 k 次标准误差.

因此, 我们可得

$$g_{M+1} = \sum_{k=M+1}^{\infty} \langle g_k, B_k \rangle B_k + h.$$

由于 $\{e_a\}_{a \in \mathbf{D}}$ 在 H^2 中是稠密的, 故存在 $a \in \mathbf{D}$ 使得 $\delta \triangleq |\langle h, e_a \rangle| > 0$. 特别地, 我们可选取 a 使它不同于所有已选的参数 a_k . 现在我们证明当 M 足够大时 a_{M+1} 的选取与极大选择原理相悖.

一方面, 对 (2.2) 中的无穷项级数部分用 Bessel 不等式, 可以得出

$$|\langle g_{M+1}, B_{M+1} \rangle| \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

另一方面, 我们证明, 对于足够大的 M , 永远成立

$$|\langle g_{M+1}, B_{M+1}^a \rangle| > \frac{\delta}{2}. \quad (2.5)$$

很显然, 这就得出了矛盾.

余下我们主要说明 (2.5) 成立. 因为有

$$|\langle g_{M+1}, B_{M+1}^a \rangle| \geq |\langle h, B_{M+1}^a \rangle| - |\langle G_{M+1}, B_{M+1}^a \rangle| \quad (2.6)$$

和

$$|\langle G_{M+1}, B_{M+1}^a \rangle| \leq \|G_{M+1}\| \rightarrow 0, \quad M \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

对于较大的 M , $|\langle g_{M+1}, B_{M+1}^a \rangle|$ 的下界取决于 $|\langle h, B_{M+1}^a \rangle|$ 的值. 现在对于任一正整数 M , 我们把由 $\{e_a, B_1, \dots, B_M\}$ 张成的 $(M+1)$ 维空间记为 X_{M+1}^a . h 在空间 X_{M+1}^a 中的投影的能量, 记为 $\|\frac{h}{X_{M+1}^a}\|^2$, 可通过两种途径进行估值. 一种是利用 $\{B_1, \dots, B_M, B_{M+1}^a\}$ 的标准正交性. 因为 h 和 B_1, \dots, B_M 都正交, 则有

$$\left\| \frac{h}{X_{M+1}^a} \right\|^2 = |\langle h, B_{M+1}^a \rangle|^2.$$

另一种是依照次序 $\{e_a, B_1, \dots, B_M\}$ 进行该 $(M+1)$ 个函数的标准正交化程序. 这样会有

$$\left\| \frac{h}{X_{M+1}^a} \right\|^2 \geq |\langle h, e_a \rangle|^2 = \delta^2.$$

因此, 我们可知, 对于任意 M , $|\langle h, B_{M+1}^a \rangle| \geq \delta$. 考虑到这一不等式以及 (2.6), (2.7), 我们可以得出 (2.5). \square

注 2.1 注意到通过最大选择原理得到的参数序列 a_1, \dots, a_n, \dots 不一定满足双曲不可分离性条件

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|) = \infty,$$

从而生成的 TM 系统 $\{B_k\}$ 不一定是一组基. 这样的分解方式并不关心最终的 TM 系统是否是一组基, 但关注是否可以有效地展开所给的信号 f . 事实上, 它的确可以做到, 并且收敛速度很快.

注 2.2 对任意的选择 a_1, \dots, a_n, \dots , 我们可以得到一个预-单分量函数分解: 无穷项求和中的每一项乘以 e^{it} 后是单分量函数. 如果我们选定 $a_1 = 0$, 那么所有的 B_k 都是单分量函数, 从而 AFD 给出一个单分量分解.

注 2.3 由于以下几个原因, AFD 不同于现存的任何贪婪算法 (见 [47, 93]).

(i) 在算法方面, AFD 中融合了一个广义的后移算子操作, 或者叫筛选过程, 这一过程把标准误差变为导出误差;

(ii) 导出误差允许在迭代的每一步中选择任何必要的最优逼近参数, 包括可重复选取同一参数多次. 这对于最佳逼近是必要的. 贪婪算法禁止参数的重复选取;

(iii) 向后平移算子操作自动产生一个标准正交系统, 或者 TM 系统, 这一过程并未使用 Gram-Schmidt 正交化.

注 2.4 当限制算法作用于一个适当的子函数类时, AFD 的收敛速度是 $\frac{M}{\sqrt{n}}$, 这里 n 代表 AFD 部分和的阶数. 这对于非光滑函数 (Hardy 空间函数的边界极限) 来说是一个相当好的逼近结果. 经典的收敛性定理可能看上去更好, 但它们是针对光滑函数来讲的.

2.3 解绕 AFD (UWAFD)

设 $f = hg$, 其中 f, g 都是 Hardy $H^2(\mathbf{D})$ 空间中函数, 并且 h 是一个内函数. 设 f 和 g 可以分别展开为如下的 Fourier 级数,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k.$$

由 Plancherel 定理和内函数的复模 1 性质, 可以推出

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2 = \|g\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |d_k|^2.$$

在数字信号处理 (DSP) 中, 有以下结论: 对于任意的 n ,

$$\sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \geq \sum_{k=n}^{\infty} |d_k|^2$$

(外函数的能量前置性质, 参见如 [8, 20]).

在 DSP 中, 这指的是物理可实现信号中那些最小相位信号的能量前置性质. 这相当于只要先将内函数因子分解出来, 剩余外函数部分的 Fourier 级数的收敛速度就会提高. 这表明 AFD 想要改善收敛速度, 最好在处理的流程中融合一个因子分解的步骤. 这也是合理的: 当一个信号本身是高频时, 我们应该先做“解绕”, 然后从较低频率部分中提取最大部分. 我们按照下述步骤处理信号 (见 [62, 70]). 首先, 对 f 做分解 $f = f_1 = I_1 O_1$, 这里 I_1 和 O_1 分别是 f 的内函数和外函数. 这个分解的依据是 Nevanlinna 因子分解定理, 参考 [100]. 其中外函数有明确的积分表达式

$$O_1(z) = e^{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |f_1(e^{it})| dt}.$$

表达式中外函数的边界值可以用 f_1 的边值来计算. 当 z 取在边界上时, 该积分表达式按 Plemelj 定理来算. 这样, 积分的虚部变成 $\log |f_1(e^{it})|$ 的圆周上的 Hilbert 变换. 接下来, 我们对于 O_1 做最大筛选. 从而可以给出

$$f(z) = I_1(z) \left[\langle O_1, e_{a_1} \rangle e_{a_1}(z) + f_2(z) \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \right],$$

其中 f_2 是 O_1 经由 a_1 的最大筛选:

$$f_2(z) = \frac{O_1(z) - \langle O_1, e_{a_1} \rangle e_{a_1}(z)}{\frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z}}.$$

接着将 f_2 分解成内函数和外函数的乘积, $f_2 = I_1 O_2$, 则有

$$f(z) = I_1(z) \left[\langle O_1, e_{a_1} \rangle e_{a_1}(z) + I_2(z) O_2(z) \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z} \right].$$

继续对 O_2 做最大筛选, 一直按这个步骤进行下去. 通过这样的方式我们得到了解绕的 AFD 分解算法 (见 [62]):

定理 2.2 上述过程给出了解绕 AFD (UWAFD) 分解

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \prod_{l=1}^k I_l(z) \langle O_k, e_{a_k} \rangle B_k(z) + f_{n+1}(z) \prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z} \prod_{l=1}^n I_l(z),$$

这里 $f_{k+1} = I_{k+1} O_{k+1}$ 是 O_k 经由 a_k ($k = 1, \dots, n$) 的最大筛选, I_{k+1} 和 O_{k+1} 分别是 f_{k+1} 的内函数和外函数. 更进一步有,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^k I_l(z) \langle O_k, e_{a_k} \rangle B_k(z).$$

注 2.5 和 AFD 一样, 解绕 AFD (UWAFD) 是一个单分量函数或者预-单分量函数分解. 从数值实验可以看出, 在众多的 AFD 类型的算法当中, UWAFD 收敛最快, 特别是把它用于分解奇异内函数时 (见 [70]).

注 2.6 如果我们在 UWAFD 算法中去掉最大筛选过程, 算法变成 UWE, 它首次在 [55] (2000) 中被提出. 下面我们记 Blaschke 乘积为 ϕ_k , 允许它有有限个或无穷个零点; 记一个奇异内函数和一个外函数的乘积为 ψ_k ; 记 H^2 空间函数为 f_k , 这里 $f = f_1$, $f_k(z) = \psi_{k-1}(z) - \psi_{k-1}(0)$, $k = 2, 3, \dots$, $c_k = \psi_k(0)$, $k = 1, 2, \dots$. 这一过程写出来为

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) = \phi_1(z)\psi_1(z) \\ &= \phi_1(z)(\psi_1(z) - \psi_1(0) + \psi_1(0)) \\ &= c_1\phi_1(z) + \phi_1(z)f_2(z) \\ &= c_1\phi_1(z) + \phi_1(z)\phi_2(z)(\psi_2(z) - \psi_2(0) + \psi_2(0)) \\ &= c_1\phi_1(z) + c_2\phi_1(z)\phi_2(z) + \phi_1(z)\phi_2(z)f_3(z) \\ &= \dots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_1(z) \cdots \phi_k(z). \end{aligned}$$

H^2 空间中的收敛性的证明首次在 [62] 中给出, [11] 中包含几个一般性的收敛性结果. 在最近发表的论文 [90] 中我们也讨论了 UWE 算法在计算中的一些问题.

2.4 n -最佳有理逼近的循环 AFD 算法

在 Core-AFD 中, 我们通过接续地选择参数 $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ 来构造 Blaschke 形式的较优序列

$$\sum_{k=1}^n \langle f, B_{\{a_1, \dots, a_k\}} \rangle B_{\{a_1, \dots, a_k\}}(z) \quad (2.8)$$

去逼近给定的函数. 现在我们改变一下问题的提法: 给定 $f \in H^2(\mathbf{D})$ 和正整数 n , 寻找 n 个参数 a_1, a_2, \dots, a_n 使得与其对应的 n -Blaschke 形式 (2.8) 能最优逼近 f , 也就是说

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \langle f, B_{\{a_1, \dots, a_k\}} \rangle B_{\{a_1, \dots, a_k\}}(z) \right\| \quad (2.9)$$

$$= \min \left\{ \left\| f - \sum_{k=1}^n \langle f, B_{\{b_1, \dots, b_k\}} \rangle B_{\{b_1, \dots, b_k\}}(z) \right\| : \{b_1, \dots, b_n\} \in \mathbf{D}^n \right\}. \quad (2.10)$$

这相当于求解一个同时选择 n 个参数的最优, 很显然这优于接续地选参数的方式. 同时选择一个 n -Blaschke 形式的参数等价于所谓的阶不超过 n 的最佳有理逼近. 这一问题被叫做 n -阶最佳有理逼近. 一直以来它都是一个未解决的问题, 它的表述如下.

设 p 和 q 是单复变的多项式. 我们说 (p, q) 是一个 n -对, 若 p 和 q 是互素的, 它们的次数都不超过 n , 且 q 在单位圆盘上没有零点. 记所有 n -对组成的集合为 \mathcal{R}_n . 如果 $(p, q) \in \mathcal{R}_n$, 那么有理函数 $\frac{p}{q}$ 是一个次数不超过 n 的有理分式. 设 f 为定义在单位圆盘上的 Hardy H^2 空间中的一个函数. 寻找 f 的 n -最佳有理逼近实际上是寻找一个 n -对 (p_1, q_1) 使得

$$\left\| f - \frac{p_1}{q_1} \right\| = \min \left\{ \left\| f - \frac{p}{q} \right\| : (p, q) \in \mathcal{R}_n \right\}.$$

这个最小值问题的解的存在性已经于几十年前就得到了证明 (见 [96]), 然而, 至今为止, 仍然没有一个理论算法来求出这个解. 最佳 n -Blaschke 形式的逼近本质上等价于 n -最佳有理逼近. 对于 (2.9) 中最小值问题解的存在性还有另外的证明 (见 [78]). 我们期望利用 Blaschke 形式的优势针对经典的 n -最佳有理逼近提出一个理论上严格完备的算法. 使用循环 AFD 算法我们可以轻松地在目标函数只有一个驻点的情况下找到上述问题的一个解 (见 [66]). 一般情况下, 循环 AFD 给出一个依赖初值的条件解. 除循环 AFD 以外, 也有一个法国的研究机构 INRIA 曾给出算法 RARL2, 但这个算法同样也只能计算出一个条件解 (见 [3]). 循环 AFD 使用的理论和算法步骤都很清晰. 它直接找出要逼近的有理函数的极点. 其它的有理逼近模型大多是把 p 和 q 的系数都当做参数来建立模型解决问题. 如果使用多项式的系数, 需要确定的参数数量将会是最佳 n -Blaschke 形式方法的两倍, 往往会涉及到繁琐的分析和计算. 最优化问题的最终解依赖于初始状态的最优选择. 而寻找最优初始状态本身是一个 NP 难问题.

对于任一给定的自然数 n , n -Blaschke 形式的最优化问题的目标函数是

$$A(f; a_1, \dots, a_n) = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle f, B_k \rangle|^2. \quad (2.11)$$

定义 2.1 称一个 n -元数组 (a_1, \dots, a_n) 为目标函数 $A(f; z_1, \dots, z_n)$ 的一个依坐标极小点 (CMP), 若在 $1, \dots, n$ 中任取 k , 只要我们先固定其余的 $n-1$ 个变量为 $z_1 = a_1, \dots, z_{k-1} = a_{k-1}, z_{k+1} = a_{k+1}, \dots, z_n = a_n$, 再通过选择第 k 个变量 z_k 来最小化目标函数, 则有

$$a_k = \arg \min \{A(f; a_1, \dots, a_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \dots, a_n) : z_k \in \mathbf{D}\}.$$

在 Core-AFD 算法中, 我们进行以下步骤: 由一个 \mathbf{D} 中的 $(k-1)$ -元数组 $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$, 我们得到了导出误差 f_2, \dots, f_k , 对于 f_k 使用最大选择原理找到给出 $\max\{|\langle f_n, e_a \rangle| : a \in \mathbf{D}\}$ 的一个 a_k . 循环 AFD 一直对 $1, \dots, n$ 的任意排列 P 中的 $k = n$ 重复这个过程, 也就是, 用 $a_{P(1)}, \dots, a_{P(n-1)}$ 这前 $(n-1)$ 个参数计算出对应的导出误差 f_2, \dots, f_n , 然后用最大选择原理选出一个新的最优的 $a_{P(n)}$.

我们提出的循环 AFD 算法在下面的定理中得到肯定.

定理 2.3 假设 f 对任意 $m < n$ 都不是一个 m -Blaschke 形式. 令 $s_0 = \{b_1^{(0)}, \dots, b_n^{(0)}\}$ 是 \mathbf{D} 内的任一 n -元数组. 固定 s_0 中的某 $n-1$ 个参数并基于目标函数 (2.11) 用最大选择原理选取剩余的那个参数. 记得到的新的 n -元数组为 s_1 . 一直重复这样的操作, 对 n 个参数做循环的最优选择. 这样我们可以得到一个 n -元数组序列 $s_0, s_1, \dots, s_l, \dots$, 它使得目标函数值 d_l 递减到一个极限值 $d \geq 0$, 这里沿用 (2.11) 中公式的记号, 有

$$d_l = A(f; b_1^{(l)}, \dots, b_n^{(l)}) = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (1 - |b_k^{(l)}|^2) |f_k^{(l)}(b_k^{(l)})|^2. \quad (2.12)$$

那么, (i) 如果 n -元数组 \bar{s} 是序列 $\{s_l\}_{l=0}^{\infty}$ 的一个子序列的极限, 则 \bar{s} 落在 \mathbf{D} 内; (ii) \bar{s} 是 $A(f; \dots)$ 的一个 CMP; (iii) 如果一个 CMP 和其相应的值 $A(f; \dots)$ 是一一对应的, 则序列 $\{s_l\}_{l=0}^{\infty}$ 本身收敛到一个 CMP; (iv) 如果 $A(f; \dots)$ 有唯一的 CMP, 则 $\{s_l\}_{l=0}^{\infty}$ 收敛到 \mathbf{D} 内部的一个点 \bar{s} , 且取到全局最小值.

有关循环 AFD 更多的细节以及示例可以参考 [66]. 在最新的文章 [97] 中对这一算法有更深层的探讨.

2.5 具有边界趋零性质的再生核 Hilbert 空间的预-正交自适应 Fourier 分解算法 (POAFD)

有关算法的理论和步骤将会在本节介绍, 事实上, 它可以推广到更一般的场合中去. 为了说明我们的想法, 仅讨论最简单的情况, 包括加权 Bergman 空间和加权 Hardy 空间等. 在这种情况下, Hilbert 空间 \mathcal{H} 由定义在一个复平面中开连通区域 \mathcal{E} 上的函数组成, 再生核 k_a 是 \mathcal{E} 中变量 \bar{a} 的一个复解析函数且满足

$$f^{(l)}(a) = \left\langle f, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{a}} \right)^l k_a \right\rangle, \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

设 $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ 是一个包含有限个或无穷个元素的序列. 取定 n , 称 a_n 在序列 $\{a_1, \dots, a_n\}$ 中出现的次数为 a_n 的重数, 记为 $l(a_n)$. 例如, a_1 的重数为 1, a_2 的重数则取决于是否 $a_2 = a_1$. 如果是, 则 $l(a_2) = 2$; 否则, $l(a_2) = 1$. 注意到这个符号的记法有点不准确, 因为它并不依赖 a_n 的值, 只与 a_n 在对应的 n -元数组中重复出现的次数有关. 于是, 我们定义

$$\tilde{k}_{a_n} \triangleq \left[\left(\frac{\partial}{\partial \bar{a}} \right)^{l(a_n)-1} k_a \right]_{a=a_n} \triangleq \left(\frac{\partial}{\partial \bar{a}} \right)^{l(a_n)-1} k_{a_n}. \quad (2.14)$$

进一步, 我们假设下面的边界趋零条件成立, 它意味着在每一步最大选择原理都可以实施: 设 a_1, \dots, a_{n-1} 已经给定, $\{B_1, \dots, B_{n-1}\}$ 是 $\{\tilde{k}_{a_1}, \dots, \tilde{k}_{a_{n-1}}\}$ 的 Gram-Schmidt 标准正交化, 那么对 $f \in \mathcal{H}$, 预-正交系统有如下性质:

$$\lim_{a \rightarrow \partial \mathcal{E}} \langle f, B_n^a \rangle = 0, \quad (2.15)$$

这里 $\{B_1, \dots, B_{n-1}, B_n^a\}$ 是 $\{\tilde{k}_{a_1}, \dots, \tilde{k}_{a_{n-1}}, k_a\}$ 的 Gram-Schmidt 标准正交化, 其中 $a \neq a_k, k = 1, \dots, n-1$. 我们确知 (1) 如果 $a \rightarrow \partial \mathcal{E}$, 则当 a 接近边界时, a 不等于任一个 $a_k, k = 1, \dots, n-1$; (2) 在任何情况下, 极限 $a \rightarrow \partial \mathcal{E}$ 都是在复平面的单点紧致拓扑并且这个“单点”是 ∞ 的意义下. 依据这个边界趋零的条件我们得到 POAFD 的最大选择原理如下: 若有假设 (2.15), 用 Bolzano-Weierstrass 定理进行一个紧的论证, 则存在一个序列 $\{b_j\}_{j=1}^\infty$ 满足所有的 b_j 都不同于 $a_1, \dots, a_{n-1}, \lim_{j \rightarrow \infty} b_j = a_n \in \mathcal{E}$, 并且有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\langle f, B_n^{b_j} \rangle| = \max\{|\langle f, B_n^a \rangle| : a \in \mathcal{H}\}. \quad (2.16)$$

在这些条件的基础上, 我们可以证明下面的引理.

引理 2.1

$$\lim_{l \rightarrow \infty} B_n^{b_j} = B_n^{a_n},$$

其中 $\{B_1, \dots, B_{n-1}, B_n^{a_n}\}$ 是 $\{\tilde{k}_{a_1}, \dots, \tilde{k}_{a_{n-1}}, \tilde{k}_{a_n}\}$ 的 Gram-Schmidt 正交化.

证明 如果 a_n 与 $a_k (k = 1, \dots, a_{n-1})$ 都不同, 那么 $\lim_{j \rightarrow \infty} B_n^{b_j} = B_n^{a_n}$, 这里 $\{B_1, \dots, B_{n-1}, B_n^{a_n}\}$ 正是 $\{\tilde{k}_{a_1}, \dots, \tilde{k}_{a_{n-1}}, k_{a_n}\} = \{\tilde{k}_{a_1}, \dots, \tilde{k}_{a_{n-1}}, \tilde{k}_{a_n}\}$ 的 Gram-Schmidt 正交化. 现在只须考虑 a_n 与 a_1, \dots, a_{n-1} 中的某个元素重合的情况, 换句话说, $l(a_n) > 1$. 这意味着, 在记号

(2.14) 中, $(l-1)$ 个函数 $k_{a_n}, \frac{\partial}{\partial \bar{a}} k_{a_n}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{a}}\right)^{(l-2)} k_{a_n}$ 已经在序列 $\{\tilde{k}_{a_1}, \dots, \tilde{k}_{a_{n-1}}\}$ 中出现. 因此,

$$T_{l-2}(b_j, a_n) = k_{a_n} + \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{a}} k_{a_n}}{1!} (\bar{b}_j - \bar{a}_n) + \dots + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \bar{a}}\right)^{(l-2)} k_{a_n}}{(l-2)!} (\bar{b}_j - \bar{a}_n)^{l-2},$$

作为 \bar{a} 的实解析函数 $k_a(z)$ 的在点 \bar{a}_n 处的阶为 $(l-2)$ 的 Taylor 展开式在点 \bar{b}_j 处的取值, 已经包含在由 B_1, \dots, B_{n-1} 生成的线性空间中. 这说明

$$T_{l-2}(b_j, a_n) - \sum_{k=1}^n \langle T_{l-2}(b_j, a_n), B_k \rangle B_k = 0. \quad (2.17)$$

由于任意的 b_j 与所有的 $a_k, k=1, \dots, n$ 都不同, 我们可知, 由 Gram-Schmidt 正交标准化公式,

$$B_n^{b_j}(z) = \frac{k_{b_j}(z) - \sum_{k=1}^{n-1} \langle k_{b_j}, B_k \rangle B_k(z)}{\|k_{b_j} - \sum_{k=1}^{n-1} \langle k_{b_j}, B_k \rangle B_k\|}. \quad (2.18)$$

把 (2.17) 中的项插入到 (2.18) 中, 并且对分子和分母分别除以 $(\bar{b}_j - \bar{a}_n)^{l-1}$ 和 $|\bar{b}_j - \bar{a}_n|^{l-1}$, 则有

$$B_n^{b_j}(z) = e^{-i(l-1)\theta} \frac{\frac{k_{b_j}(z) - T_{l-2}(k_{b_j}, a_n)(z)}{(\bar{b}_j - \bar{a}_n)^{l-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \left\langle \frac{k_{b_j} - T_{l-2}(b_j, a_n)(z)}{(\bar{b}_j - \bar{a}_n)^{l-1}}, B_k \right\rangle B_k(z)}{\left\| \frac{k_{b_j}(z) - T_{l-2}(b_j, a_n)(z)}{(\bar{b}_j - \bar{a}_n)^{l-1}} - \sum_{k=1}^{n-1} \left\langle \frac{k_{b_j}(z) - T_{l-2}(b_j, a_n)(z)}{(\bar{b}_j - \bar{a}_n)^{l-1}}, B_k \right\rangle B_k \right\|}, \quad (2.19)$$

其中 $e^{i(l-1)\theta}$ 是 $b_j \rightarrow a_n$ 的切线方向. 事实上, 我们可以取任意方向, 包括 $\theta = 0$. 假如按照 $\theta = 0$ 令 $b_j \rightarrow a_n$, 根据 Taylor 展开的 Lagrange 型余项, 可知

$$\lim_{j \rightarrow \infty} B_n^{b_j}(z) = \frac{\tilde{k}_{a_n}(z) - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \tilde{k}_{a_n}, B_k \rangle B_k(z)}{\|\tilde{k}_{a_n} - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \tilde{k}_{a_n}, B_k \rangle B_k\|}.$$

因此, $\{B_1, \dots, B_{n-1}, B_n^{a_n}\}$ 如所期待的, 确是 $\{\tilde{k}_{a_1}, \dots, \tilde{k}_{a_{n-1}}, \tilde{k}_{a_n}\}$ 的 Gram-Schmidt 正交化. \square

注 2.7 上述证明秉承 [64] 和 [63] 的思想. 单复变情形下的证明首现于文献 [82].

预-正交自适应分解算法 (POAFD) 的收敛性定理如下所述.

定理 2.4 按照 (2.16) 所示根据最大选择原理选出 $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$, 则有

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, B_n \rangle B_n,$$

这里对任意的正整数 $n, \{B_1, \dots, B_{n-1}, B_n\}$ 是 $\{\tilde{k}_{a_1}, \dots, \tilde{k}_{a_{n-1}}, \tilde{k}_{a_n}\}$ 的 Gram-Schmidt 正交化.

我们可以用和 AFD 收敛性定理 (定理 2.1) 相同的证法来证明此定理, 这一证法只用到了标准误差 g_k . 实际上, 筛选过程和导出误差的作用由预-正交过程来替代了. 虽然具有同等的效力, 相比于经典场合下的 AFD, 一般场合的 POAFD 的不足之处是所对应的表达系统 $\{B_k\}$ 不能由筛选及导出误差程序自动得到, 而经由 G-S 程序所得到的也没有明晰的表达式.

注 2.8 对于参数的重复选取和 POAFD 读者可参考文献 [63, 64, 72, 78]. 之前也曾称 POAFD 为 POGA 或者 PreOGA 等, 后两个名称没有反映出算法中复解析函数方法的决定性作用.

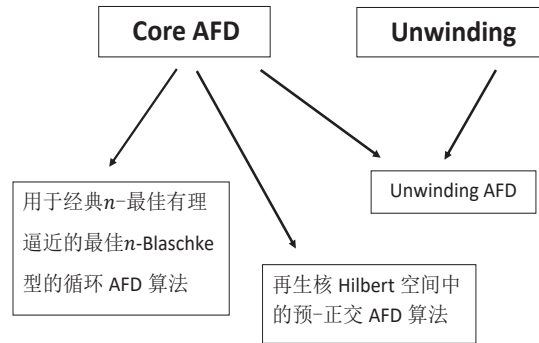


图 3 自适应 Fourier 分解方法

3 相关研究和应用

3.1 与 Beurling-Lax 平移不变子空间有关的一些问题

各种 AFD 类型的展开在很大程度上与 Hardy H^2 空间上的 Beurling-Lax 平移不变子空间有关系. 在单位圆盘的情况,

$$H^2(\mathbf{D}) = \overline{\text{span}}\{B_k\}_{k=1}^{\infty} \oplus \phi H^2(\mathbf{D}), \quad (3.1)$$

这里 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是由序列 $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ 生成的 TM 系统, 重数也计算在内, ϕ 是以 $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ (包含重数) 为零点的 Blaschke 乘积. ϕ 用这些 a_k 来定义的充分必要条件是

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|) < \infty,$$

且此时所对应的 TM 系统不构成一组基. 尽管这一结果是奠基性的及熟知的, 它与自适应逼近的关系还是第一次被探究. 笔者最近的结果证明了 TM 系统是 Schauder 系统 (见 [68]). 空间分解式 (3.1) 可以推广到 H^p 空间 $p \neq 2$ 的情形. 文献 [74, 91] 中研究了后移不变子空间, 有限带宽函数和 Bedrosian 恒等式之间的关系. 现在还有些问题未得到解决, 比如, 在 $p \neq 2$ 时能否用 TM 系统构造一个自适应的且快速收敛的展开式; 以及对于 $p = 2$ 的高维情形, 我们能将 (3.1) 推广到什么程度. 文献 [10] 标记了不变子空间的某些新进展.

3.2 超强测不准原理

单分量函数理论中对相位和频率的研究给数字信号处理奠定了必要的基础. 相关研究中证明了超强测不准原理

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4} + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |t - \langle t \rangle| |\phi(t) - \langle \omega \rangle| |f(t)|^2 dt \right)^2, \quad (3.2)$$

这里 f 是一个实值信号, σ_t 和 σ_ω 分别是关于时间和 Fourier 频率的标准差, $\langle t \rangle$ 和 $\langle \omega \rangle$ 是对应的均值 (见 [15]). 测不准原理

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4} + \left| \int_{-\infty}^{\infty} (t - \langle t \rangle) (\phi(t) - \langle \omega \rangle) |f(t)|^2 dt \right|^2$$

是由 Cohen 提出来的, 这是一个较弱的结论. 我们进一步地把上面的结果推广到了高维的情形 [15, 16, 22-24].

3.3 基于单分量函数分解的 Dirac- 型的时频分布

Dirac- 型的时频分布 (D-TFD)

$$P(t, \omega) = \rho^2(t)\delta(\omega - \theta'(t)) \quad (3.3)$$

是信号分析学家的终极期望. 常用的几种时频分布, 包括带窗的 Fourier 变换, Wigner-Ville 变换等等, 都不够令人满意. 现有的时频分布没有给出具体明确的频率成分, 并且大多依赖参数的选取. 用 AFD 分解得出的信号的正频率分解自然地产生了 Dirac- 型的时频分布. 对于一个单分量信号 $m_1(t) = \rho_1(t) \cos \theta_1(t)$, 对应定义 (3.3) 的 D-TFD 就是函数 $\omega = \theta'_1(t)$ 在 ω - t 平面上的图像 $(t, \theta'_1(t))$, 而权重 $\rho_1^2(t)$ 可以用随着 $\rho_1^2(t)$ 的值变化而连续变化的颜色来表示. 由于信号 f 可以展开成它的内蕴单分量函数的级数, 那么它的 D-TFD 是一组颜色加权的图, 其中的每一条曲线都是由构成信号的单分量函数导出的 (见 [21, 108]). 这一结果引起了一些包括 Cohen 和 Galleani 在内的著名信号分析学家的兴趣及持续关注, 同时被应用于信号分析实践中 (参考下面有关应用的章节).

3.4 高维的 AFDs

为了在高维空间开发类似的 AFD 逼近理论, 一个 Cauchy 型的复结构是必要的: Cauchy 核将起再生核的作用. 通过在 Clifford 代数或者多复变中使用 Cauchy 结构, 我们建立了不同函数空间的 AFD 型理论和算法, 这些空间包括定义在平面上的函数空间 (Stein-Weiss 多复变量管上的, 以及 Clifford 代数 Hardy 空间), 定义在实球面上的函数空间, 定义在 n - 环面上的多复变函数空间以及定义在 n 维复球上的函数空间 (见 [26, 72, 75, 97]). 我们与 Alpay, Colombo, Sabadini 的合作也得出了矩阵值 Blaschke 乘积的类似理论 (见 [1, 2]). 这些研究总体上建立了各种空间中的有理逼近理论.

3.5 Hardy 空间的 Fourier 频谱刻画: 解析信号层面

上半空间的针对 Hardy H^2 空间的 Paley-Wiener 定理确定了以下事实: 如果 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 则 $f \in H^2(\mathbb{C}^+)$ 当且仅当 $\text{supp } \hat{f} \subset [0, \infty)$. 这一结果可以系统地推广到 $H^p(\mathbb{C}^+)$ ($p \in [1, \infty]$) 中, 这里 Fourier 变换是在分布的意义下定义的 (见 [58, 79]). 可以把它总结为: 令 $f \in L^p(\mathbb{R})$, 则 f 是复的 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{C}^+)$ 中的某一函数的非切向极限当且仅当 $\hat{f} = \chi_+ \hat{f}$, 这里的示性 (特征) 函数是右半实轴的特征函数, Fourier 变换可能是在分布的意义下定义的. 对应于管上的 Hardy 空间的同类型的结果发表在 [88] 及 [43] 中. Clifford 代数情况下的同类型结果发布于 [19], 文中证明了一个 Clifford 值的函数 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 是某个定义在上半空间上的 Clifford 值的 Hardy 空间函数的非切向极限当且仅当 $\hat{f} = \chi_+ \hat{f}$, 这里 $\chi_+(\xi) = \frac{1}{2}(1 + i\frac{\xi}{|\xi|})$, $\xi = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$ (Hardy 空间投影函数). 这扩展了 [88] 中对共轭调和函数系证明的部分情形. 在各种各样的背景下, Fourier 频谱刻画都蕴含了 L^p ($1 < p \leq \infty$) 的 Hardy 空间分解, 进一步诱导了 L^p ($0 < p < 1$) 的 Hardy 空间分解 (见 [27, 44]). 我们一直在用 Hardy 空间分解的策略来研究有各种可积性的 Lebesgue 空间. 这一策略伴随着单分量函数和 AFD 逼近理论. 特别是, 对任意信号 f , 对 \hat{f} 和 χ_+ 的乘积

做 Fourier 逆变换, 我们就能得到其相应的解析信号. 这在任何情境下都是有效的. 最近我们得到 Hardy 空间 L^p - 向量场的 Hardy-Hodge 分解 (见 [4]).

3.6 作为奇异积分算子的 Hilbert 变换: 解析信号层面

和一维的情形一样 (见 [5]), 在更高维的流形中我们可以把一个超复全纯函数的非切向极限的非一标量部分定义为该非切向极限的标量部分的 Hilbert 变换 (见 [80]). 从而 Hilbert 变换就是一个特殊的奇异积分. 它并不是奇异 Cauchy 变换. 对 Hilbert 变换、奇异 Cauchy 变换以及其它特殊变换的研究引导我们研究一般的奇异积分. 在一维流形中, 正如 McIntosh, 钱涛、龙瑞麟和王斯雷的一系列研究工作 (见 [34, 49, 50, 57]) 所涉及, 包括实轴和圆周的 Lipschitz 扰动在内, 具有全纯核的某些奇异积分形成了算子代数. 平面上的理论也在 McIntosh (见 [33, 41, 42]) 的影响下建立起来. 通过首先将 Fueter 和 Sce 的结果推广到任意 Euclidean 空间 (作为技术必要性), 作者建立了定义在任意维数单位球面的 Lipschitz 扰动上的 Clifford 全纯核的奇异积分的算子理论 (见 [65]). 基于已建立的奇异积分理论, 平面和球体的 Hilbert 变换得到了很好的理解. 例如, 球面上的解析信号可以按下述方式构造. 设 f 是流形 \mathcal{S} 上的实值能量有限信号. 记 f 在流形上的 Hilbert 变换为 $H_S f$. 则定义 \mathcal{S} 上的解析信号为 $f^+ = f + H_S f$, 这里 $H_S f$ 是非一标量部分 (在球面上它是 Clifford 2- 型值的函数). f^+ 可以 Clifford 全纯地延拓到由 \mathcal{S} 划分出的两个区域中的一个. 可以推出, 如果 ζ 在平面或球面上, 则

$$f^+(\zeta) = \rho_f(\zeta) \left(\frac{f(\zeta)}{\rho_f(\zeta)} + \frac{H_S(f)(\zeta)}{|H_S(f)(\zeta)|} \frac{|H_S(f)(\zeta)|}{\rho_f(\zeta)} \right) \quad (3.4)$$

$$= \rho_f(\zeta) \left(\cos \theta(\zeta) + \frac{H_S(f)(\zeta)}{|H_S(f)(\zeta)|} \sin \theta(\zeta) \right) \quad (3.5)$$

$$= \rho_f(\zeta) e^{\frac{H_S(f)(\zeta)}{|H_S(f)(\zeta)|} \theta(\zeta)}, \quad (3.6)$$

这里 $\rho_f(\zeta) = \sqrt{|f(\zeta)|^2 + |H_S f(\zeta)|^2}$. 可以验证 $(\frac{H_S(f)(\zeta)}{|H_S(f)(\zeta)|})^2 = -1$. 因而 $\frac{H_S(f)(\zeta)}{|H_S(f)(\zeta)|}$ 是随自变量变化的虚部, 它具有和复变量中虚部 $i^2 = -1$ 一样的性质. 和经典情形中利用 Clifford 全纯延拓的方式类似, 定义瞬时频率为

$$\theta'(\zeta) = \operatorname{Re}\{[(\Gamma_\zeta - I)f^+(\zeta)] [(f^+(\zeta))^{-1}]\},$$

等号右面的部分可以用幅角 $\theta(\zeta)$ 来表示 (见 [80, 104]), 这里 Γ_ζ 是定义在流形上的面 Dirac 算子. 这种表示方式使得 IF 的基本想法以及相关的逼近理论在高维的情形下仍有意义. 相关研究分别于 2015 年和 2017 年发表在由科学出版社出版的两部专著 [63] 和 [71] 中. 最后, 我们注意到 Hilbert 变换是可以用线性算子与仿射群的可交换性来刻画的, 这表明 Hilbert 变换、Dirac 微分算子和群表示理论有密切的联系.

3.7 应用

AFD 在系统辨识和信号分析方面有行之有效的应用. 有关系统辨识的应用结果包括 [7, 51–53]. 一批信号分析师接受及推行 AFD 方法. 下面我们总结一下时频分析及图像处理方面的部分应用.

[101] 中评论表示 AFD 是近些年来提出的一种新的方法, 可以用来分解及重构信号. 实验表明一维 AFDs 具有良好的信号分解和重构能力. 文献 [102] 中将二维 AFD 与传统的频率数字水

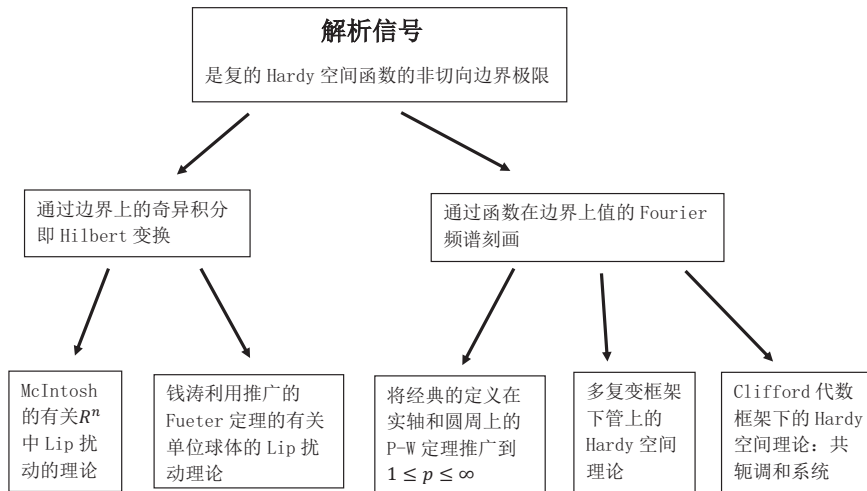


图 4 各种框架下的解析信号

印方法 (包括离散余弦变换 DCT, 离散小波变换 DWT, 离散 Fourier 变换 DFT 等) 做了对比, 认为二维 AFD 在有攻击的情况下具有更好的透明度和鲁棒性. 文献 [103] 修改了原始的二维 AFD 算法, 从而提高了计算速度并且把它用于去噪.

在 [45] 中, 梁羽等人在北京交通大学提出了一种新的基于 AFD 的滚动轴承故障诊断方法. 他们表明, AFD 可以避免使用带通滤波器, 后者常常会遇到算法参数选择的困难, 而 AFD 能够自适应、高效、准确地诊断各种滚动轴承问题.

在 [99] 中, 作者研究了肺音 (LS) 和心音 (HS) 信号之间的干扰和分离. 由于它们的频谱重叠, 很难将它们分开. 文章提出了一种基于 AFD 的新型分离方法. 这种基于 AFD 的分离方法用密歇根大学心音与 Murmur 图书馆的真实 HS 信号以及来自 3M 知识库的实际 LS 信号得到了验证. 仿真结果表明, 该方法比基于递推最小二乘 (RLS) 的提取方法, 比 EMD 及其各种扩展, 包括集合 EMD (EEMD), 多元 EMD (M-EMD) 和噪声辅助 M-EMD (NAM-EMD) 都更有效.

多年来, 人们一直在进行不懈的研究, 希望预测股价走势. [107] 提出了一种基于 AFD 的新型的股价运动预测系统. AFD 可以有效地提取信号的主要趋势, 从而特别适用于基于道琼斯理论的自动技术分析. 通过与直接 BP 法和人工观测相比较, 文章对提出的方法的有效性进行了评估. 结果表明该方法有充分的前景.

[106] 提出了基于 AFD 的时频语音分析方法. 鉴于语音信号的基本频率经常波动这一事实, 经典的基于短时 Fourier 变换 (STFT) 的频谱图分析面临着窗口大小选择的困难. AFD 是一种新型的信号分解理论. AFD 的突出特点是给出了每个分解元的瞬时频率, 因此可以利用时频分析理论. 用 TIMIT 声学语音连续语音语料库中的例句进行了实验. 结果显示基于时频分布的 AFD 优于 STFT.

AFD 已经被 CASA 环境科技有限公司的产品采用, 其中包括第二代 BEWs (生物预警系统) 和 ETBEs (生态毒性生物暴露系统). 这两个系统利用 AFD 和 Unwinding 分析生物行为信号. 与传统的 Fourier、小波和 EMD 算法相比, AFD 方法可以有效地解决低浓度污染物的预警判断和鱼类生物钟的干扰等问题.

在控制理论中, 文章 [40] 的作者引入了 AFD 算法来消除无线传输过程中叠加在输出信号上的信道噪声. 在频域中基于 AFD 提出了一种无线传输离散线性系统的 ILC 方法. 仿真结果表明与 Fourier 分解相比, AFD 算法能够在小分解阈值的情况下很好地实现信号去噪. 因此, 用 ILC 系统的输出信号追踪期望信号的目标可以更好地完成.

印度研究人员在他们的文章 [31] 中断言, 对于分析与电子医疗设备有关的生物医学信号, 频域方法优于时域方法, 并且在若干数字频域方法 (Hermite, Fourier, Karhunen-Loeve, Wavelet) 中 AFD 具有更多的特征, 并且对于数据压缩更稳定. 基于使用 AFD 进行压缩, 该公司开始制造经济、准确和稳定的家用电子医疗设备.

除了中国和亚洲之外, AFD 也取得了国际影响力. 对 AFD 的关注、研究以及应用出现在一些相关的文献中, 包括 Fulle 在 Michigan 大学的有关生氧光合作用的博士论文; Kirkbas 等人撰写的基于 Jaya 优化的自适应 Fourier 分解的最优基础追踪 (见 [38]); 由 Vatchev 所作的一类内在的三角模式多项式 (见 [94]); Mashreghi 等人有关 Blaschke 乘积及其应用的研究 (见 [48]); Kraussner 等人所做的关于定义在圆柱和圆环上的 Clifford 及调和分析的研究 (见 [39]); Colombo 等人关于积分形式的 Fueter 映射定理和 \mathcal{F} 泛函微积分的研究 (见 [14]); Falcão 等人有关 Clifford 全纯函数的生成方法的评论 (见 [29]); Colombo 等人撰写的有关双轴向 Clifford 全纯函数的 Fueter 基元的研究 (见 [13]); Salomon 对于图像纹理中的各向异性的分析 (见 [87]); Sakaguchi 有关更高阶偏微分方程中相关积分型方法的讨论 (见 [83–86]); León 的瞬时频率估计以及通过复的小波加法表示音频信号的研究 (见 [25]); Mozes 有关 ECG 信号的瞬时频率的计算 (见 [54]); Gomes 作为博士论文所研究的 Clifford 分析中的压缩感知 (见 [35]); Eisner 等人对定义在上半平面的 Malmquist Takenaka 系统的离散正交性和有理逼近的研究 (见 [28]) 以及 Perotti 的有关定向四元数 Hilbert 算子的文章 (见 [56]).

致谢 作者衷心感谢王小银在翻译、打字、以及插图方面的协助.

参考文献

- [1] Alpay, D., Colombo, F., Qian, T. and Sabadini, I., Adaptive orthonormal systems for matrix-valued functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2017, 145(5): 2089-2106.
- [2] Alpay, D., Colombo, F., Qian, T. and Sabadini, I., Adaptive decomposition: The case of the Drury-Arveson space, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2017, 23(6): 1426-1444.
- [3] Baratchart, L., Cardelli, M. and Olivi, M., Identification and rational L^2 approximation: a gradient algorithm, *Automatica*, 1991, 27(2): 413-417.
- [4] Baratchart, L., Mai, W.X. and Qian, T., Greedy algorithms and rational approximation in one and several variables, In: *Modern Trends in Hypercomplex Analysis* (Bernstein, S., Kähler, U., Sabadini, I. and Sommen, F. eds.), Trends in Mathematics, Boston: Birkhäuser, 2016, 19-33.
- [5] Bell, S.R., *The Cauchy Transform, Potential Theory and Conformal Mapping*, Boca Raton: CRC Press, 1992.
- [6] Boashash, B., Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal. 1. Fundamentals, *Proc. IEEE*, 1992, 80(4): 520-538.
- [7] Chen, Q.H., Mai, W.X., Zhang, L.M. and Mi, W., System identification by discrete rational atoms, *Automatica*, 2015, 56: 53-59.
- [8] Cheng, Q.S., *Digital Signal Processing*, Beijing: Peking University Press, 2003 (in Chinese).
- [9] Cohen, L., *Time-Frequency Analysis: Theory and Applications*, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.

- [10] Coifman, R.R. and Peyrière, J., Phase unwinding, or invariant subspace decompositions of Hardy spaces, 2017, arXiv: 1707.04844.
- [11] Coifman, R.R. and Steinerberger, S., Nonlinear phase unwinding of functions, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2017, 23(4): 778-809.
- [12] Coifman, R., Steinerberger, S. and Wu, H.T., Carrier frequencies, holomorphy, and unwinding, *SIAM J. Math. Anal.*, 2017, 49(6): 4838-4864.
- [13] Colombo, F., Sabadini, I. and Sommen, F., The Fueter primitive of biaxially monogenic functions, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2014, 13(2): 657-672.
- [14] Colombo, F., Sabadini, I. and Sommen, F., The Fueter mapping theorem in integral form and the \mathcal{F} -functional calculus, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2010, 33(17): 2050-2066.
- [15] Dang, P., Deng, G.T. and Qian, T., A sharper uncertainty principle, *J. Funct. Anal.*, 2013, 265(10): 2239-2266.
- [16] Dang, P., Deng, G.T. and Qian, T., A tighter uncertainty principle for linear canonical transform in terms of phase derivative, *IEEE Trans. Signal Process.*, 2013, 61(21): 5153-5164.
- [17] Dang, P., Liu, H. and Qian, T., Hilbert transformation and representation of $ax + b$ group, *Canad. Math. Bull.*, 2018, 61: 70-84.
- [18] Dang, P., Liu, H. and Qian, T., Hilbert transformation and $r\text{Spin}(n) + \mathbb{R}^n$ group, 2017, arXiv:1711.04519.
- [19] Dang, P., Mai, W.X. and Qian, T., Fourier spectrum characterizations of Clifford HP spaces on R_+^{n+1} for $1 \leq p \leq \infty$, 2017, arXiv: 1711.02610.
- [20] Dang, P. and Qian, T., Analytic phase derivatives, all-pass filters and signals of minimum phase, *IEEE Trans. Signal Process.*, 2011, 59(10): 4708-4718.
- [21] Dang, P. and Qian, T., Transient time-frequency distribution based on mono-component decompositions, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, 2013, 11(3): 1350022, 24 pages.
- [22] Dang, P., Qian, T. and Chen, Q.H., Uncertainty principle and phase amplitude analysis of signals on the unit sphere, *Adv. Appl. Clifford Al.*, 2017, 27(4): 2985-3013.
- [23] Dang, P., Qian, T. and Yang, Y., Extra-strong uncertainty principles in relation to phase derivative for signals in Euclidean spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, 437(2): 912-940.
- [24] Dang, P., Qian, T. and You, Z., Hardy-Sobolev spaces decomposition in signal analysis, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2011, 17(1): 36-64.
- [25] De León, P., Beltrán, J.R. and Beltrán, F., Instantaneous frequency estimation and representation of the audio signal through Complex Wavelet Additive Synthesis, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, 2014, 12(3): 1450030, 28 pages.
- [26] De Schepper, N., Qian, T., Sommen, F. and Wang, J.X., Holomorphic approximation of L_2 -functions on the unit sphere in R^3 , *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, 416(2): 659-671.
- [27] Deng, G.T. and Qian, T., Rational approximation of functions in Hardy Spaces, *Complex Anal. Oper. Th.*, 2016, 10(5): 903-920.
- [28] Eisner, T. and Pap, M., Discrete orthogonality of the Malmquist Takenaka system of the upper half plane and rational interpolation, *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, 20(1): 1-16.
- [29] Falcão, M.I., Cruz, J.F. and Malonek, H.R., Remarks on the generation of monogenic functions, In: 17th International Conference on the Applications of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering (Gürlebeck, K. and Könke, C. eds.), Weimar, Germany, 2006.
- [30] Gabor, D., Theory of communication. Part 1: The analysis of information, *J. Inst. Elect. Eng.*, 1946, 93(26): 429-441.
- [31] Ganta, P., Manu, G. and Anil, S., New perspective for health monitoring system, *Int. J. Ethics Eng. Manag. Edu.*, 2016, 3(10): 7-10.
- [32] Garnett, J.B., Bounded Analytic Functions, New York: Academic Press, 1981.

- [33] Gaudry, G.I., Long, R. and Qian, T., A martingale proof of L^2 -boundedness of Clifford-valued singular integrals, *Ann. Math. Pura Appl.*, 1993, 165(1): 369-394.
- [34] Gaudry, G.I., Qian, T. and Wang, S.L., Boundedness of singular integral operators with holomorphic kernels on star-shaped closed Lipschitz curves, *Colloq. Math.*, 1996, 70: 133-150.
- [35] Gomes, N.R., Compressed sensing in Clifford analysis, Doctoral Dissertation, Aveiro: Universidade de Aveiro, 2015.
- [36] Gorusin, G.M., 陈建功 (译), 复变函数的几何理论, 上海: 上海科学技术出版社, 1956.
- [37] Hummel, J.A., Multivalent starlike functions, *J. d'Analyse Math.*, 1967, 18(1): 133-160.
- [38] Kirkbas, A., Kizilkaya, A. and Bogar, E., Optimal basis pursuit based on Jaya optimization for adaptive Fourier decomposition, In: 2017 40th International Conference on Telecommunications and Signal Processing, Barcelona: IEEE, 2017: 538-543.
- [39] Krausshar, R.S. and Ryan, J., Clifford and harmonic analysis on cylinders and tori, *Rev. Mat. Iberoamer.*, 2005, 21(1): 87-110.
- [40] Lei, Y., Fang, Y. and Zhang, L.M., Iterative learning control for discrete linear system with wireless transmission based on adaptive Fourier decomposition, In: 2017 36th Chinese Control Conference (CCC), Dalian: IEEE, 2017: 3343-3348.
- [41] Li, C., McIntosh, A. and Qian, T., Clifford algebras, Fourier transforms and singular convolution operators on Lipschitz surfaces, *Rev. Mat. Iberoamer.*, 1994, 10(3): 665-721.
- [42] Li, C., McIntosh, A. and Semmes, S., Convolution singular integrals on Lipschitz surfaces, *J. Amer. Math. Soc.*, 1992, 5(3): 455-481.
- [43] Li, H.C., Deng, G.T. and Qian, T., Fourier spectrum characterizations of H^p spaces on tubes over cones for $1 \leq p \leq \infty$, *Complex Anal. Oper. Th.*, 2018, 12(5): 1193-1218.
- [44] Li, H.C., Deng, G.T. and Qian, T., Hardy space decomposition of L^p on the unit circle: $0 < p \leq 1$, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2016, 61(4): 510-523.
- [45] Liang, Y., Jia, L.M., Cai, G.Q. and Liu, J.Z., A new approach to diagnose rolling bearing faults based on AFD, In: Proceedings of the 2013 International Conference on Electrical and Information Technologies for Rail Transportation-Volume II, Lecture Notes in Electrical Engineering, Vol. 288, Berlin: Springer-Verlag, 2014, 573-582.
- [46] Lyzzaik, A., On a conjecture of M. S. Robertson, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1984, 91(1): 108-110.
- [47] Mallat, S.G. and Zhang, Z.F., Matching pursuits with time-frequency dictionaries, *IEEE Trans. Signal Process.*, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [48] Mashreghi, J. and Fracain, E., Blaschke Products and Their Applications, Boston: Springer-Verlag, 2013.
- [49] McIntosh, A. and Qian, T., Convolution singular integral operators on Lipschitz curves, In: Harmonic Analysis, Lecture Notes in Math., Vol. 1494, Berlin: Springer-Verlag, 1991, 142-162.
- [50] McIntosh, A. and Qian, T., Fourier multipliers along Lipschitz curves, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1992, 333(1): 157-176.
- [51] Mi, W. and Qian, T., Frequency-domain identification: An algorithm based on an adaptive rational orthogonal system, *Automatica*, 2012, 48(6): 1154-1162.
- [52] Mi, W., Qian, T. and Wan, F., A fast adaptive model reduction method based on Takenaka-Malmquist systems, *Syst. Control Lett.*, 2012, 61(1): 223-230.
- [53] Mo, Y., Qian, T. and Mi, W., Sparse representation in Szegő kernels through reproducing kernel Hilbert space theory with applications, *Int. J. Wavelet Multiresolut. Inf. Process.*, 2015, 13(4): 1550030, 22 pages.
- [54] Mózes, F.E. and Szalai, J., Computing the instantaneous frequency for an ECG signal, *Sci. Bull. "Petru Maior" Univ. Tîrgu Mureş*, 2012, 9(2): 28-32.
- [55] Nahon, M., Phase Evaluation and Segmentation, Ph.D. Thesis, New Haven: Yale University, 2000.

- [56] Perotti, A., Directional quaternionic Hilbert operators, In: *Hypercomplex Analysis, Trends in Mathematics*, Basel: Birkhäuser, 2008, 235-258.
- [57] Qian, T., Singular integrals with holomorphic kernels and Fourier multipliers on star-shaped closed Lipschitz curves, *Studia Math.*, 1997, 123(3): 195-216.
- [58] Qian, T., Characterization of boundary values of functions in Hardy spaces with applications in signal analysis, *J. Integral Equ. Appl.*, 2005, 17(2): 159-198.
- [59] Qian, T., Analytic signals and harmonic measures, *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, 314(2): 526-536.
- [60] Qian, T., Mono-components for decomposition of signals, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2006, 29(10): 1187-1198.
- [61] Qian, T., Boundary derivatives of the phases of inner and outer functions and applications, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2009, 32(3): 253-263.
- [62] Qian, T., Intrinsic mono-component decomposition of functions: An advance of Fourier theory, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2010, 33(7): 880-891.
- [63] 钱涛, 自适应 Fourier 变换: 一个贯穿复几何, 调和分析及信号分析的数学方法, 北京: 科学出版社, 2015.
- [64] Qian, T., Two-dimensional adaptive Fourier decomposition, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2016, 39(10): 2431-2448.
- [65] Qian, T., Fourier analysis on starlike Lipschitz surfaces, *J. Funct. Anal.*, 2001, 183(2): 370-412.
- [66] Qian, T., Cyclic AFD algorithm for the best rational approximation, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2014, 37(6): 846-859.
- [67] Qian, T., Chen, Q.H. and Li, L.Q., Analytic unit quadrature signals with non-linear phase, *Phys. D*, 2005, 203(1/2): 80-87.
- [68] Qian, T., Chen, Q.H. and Tan, L.H., Rational orthogonal systems are Schauder bases, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2014, 59(6): 841-846.
- [69] Qian, T., Ho, I.T., Leong, I.T. and Wang, Y.B., Adaptive decomposition of functions into pieces of non-negative instantaneous frequencies, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, 2010, 8(5): 813-833.
- [70] Qian, T., Li, H. and Stessin, M., Comparison of adaptive mono-component decompositions, *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, 2013, 14(2): 1055-1074.
- [71] 钱涛, 李澎涛, Lipschitz 边界上的奇异积分与 Fourier 理论, 北京: 科学出版社, 2017.
- [72] Qian, T., Sproessig, W. and Wang, J.X., Adaptive Fourier decomposition of functions in quaternionic Hardy spaces, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2012, 35(1): 43-64.
- [73] Qian, T. and Tan, L.H., Characterizations of mono-components: the Blaschke and starlike types, *Complex Anal. Oper. Th.*, 2015, doi: 10.1007/s11785-015-0491-6, 17 pages.
- [74] Qian, T. and Tan, L.H., Backward shift invariant subspaces with applications to band preserving and phase retrieval problems, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2016, 39(6): 1591-1598.
- [75] Qian, T., Wang, J.X. and Yang, Y., Matching pursuits among shifted Cauchy kernels in higher-dimensional spaces, *Acta Math. Sci.*, 2014, 34(3): 660-672.
- [76] Qian, T., Wang, R., Xu, Y.S. and Zhang, H.Z., Orthonormal bases with nonlinear phases, *Adv. Comput. Math.*, 2010, 33(1): 75-95.
- [77] Qian, T. and Wang, Y.B., Adaptive Fourier series—A variation of greedy algorithm, *Adv. Comput. Math.*, 2011, 34(3): 279-293.
- [78] Qian, T. and Wegert, E., Optimal approximation by Blaschke forms, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2013, 58(1): 123-133.
- [79] Qian, T., Xu, Y.S., Yan, D.Y., Yan, L.X. and Yu, B., Fourier spectrum characterization of Hardy spaces and applications, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2009, 137(3): 971-980.
- [80] Qian, T. and Yang, Y., Hilbert transforms on the sphere with the Clifford algebra setting, *J. Fourier Anal.*

- Appl.*, 2009, 15(6): 753-774.
- [81] Qian, T., Zhang, L.M. and Li, Z.X. Algorithm of adaptive Fourier decomposition, *IEEE Trans. Signal Process.*, 2011, 59(12): 5899-5906.
- [82] Qu, W. and Dang, P., Rational approximation in the Bergman spaces, 2018, arXiv: 1803.04609.
- [83] Sakaguchi, F. and Hayashi, M., Integer-type algorithm for higher order differential equations by smooth wavepackets, small Part I: Mathematical framework, 2009, arXiv: 0903.4848.
- [84] Sakaguchi, F. and Hayashi, M., Differentiability of eigenfunctions of the closures of differential operators with polynomial-type coefficients, 2009, arXiv: 0903.4852.
- [85] Sakaguchi, F. and Hayashi, M., General theory for integer-type algorithm for higher order differential equations, *Numer. Funct. Anal. Opt.*, 2011, 32(5): 541-582.
- [86] Sakaguchi, F. and Hayashi, M., Practical implementation and error bound of integer-type algorithm for higher-order differential equations, *Numer. Funct. Anal. Opt.*, 2011, 32(12): 1316-1364.
- [87] Salomon, L., Analyse de l'anisotropie dans des images texturées, Rapport—Introduction à la Recherche en Laboratoire, 2016 (in French).
- [88] Stein, E.M. and Weiss, G., Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton: Princeton University Press, 1971.
- [89] Tan, L.H., Shen, L.X. and Yang, L.H., Rational orthogonal bases satisfying the Bedrosian Identity, *Adv. Comput. Math.*, 2010, 33(3): 285-303.
- [90] Tan, L.H. and Qian, T., Extracting outer function part from Hardy space function, *Sci. China Math.*, 2017, 60(11): 2321-2336.
- [91] Tan, L.H., Qian, T. and Chen, Q.H., New aspects of Beurling-Lax shift invariant subspaces, *Appl. Math. Comput.*, 2015, 256: 257-266.
- [92] Tan, L.H., Yang, L.H. and Huang, D.R., The structure of instantaneous frequencies of periodic analytic signals, *Sci. China Math.*, 2010, 53(2): 347-355.
- [93] Temlyakov, V.N., Greedy algorithm and m -term trigonometric approximation, *Constr. Approx.*, 1998, 14(4): 569-587.
- [94] Vatchev, V., A class of intrinsic trigonometric mode polynomials, In: International Conference Approximation Theory, Cham: Springer, 2017, 361-373.
- [95] Vliet, D.V., Analytic signals with nonnegative instantaneous frequency, *J. Integral Equ. Appl.*, 2009, 21(1): 95-111.
- [96] Walsh, J.L., Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Plane, Providence, RI: American Mathematical Society, 1969.
- [97] Wang, J.X. and Qian, T., Approximation of monogenic functions by higher order Szegő kernels on the unit ball and half space, *Sci. China Math.*, 2014, 57(9): 1785-1797.
- [98] Wang, S.L., Simple proofs of the Bedrosian equality for the Hilbert transform, *Sci. China Ser. A: Math.*, 2009, 52(3): 507-510.
- [99] Wang, Z., Da Cruz, J.N. and Wan, F., Adaptive Fourier decomposition approach for lung-heart sound separation, In: 2015 IEEE International Conference on Computational Intelligence and Virtual Environments for Measurement Systems and Applications (CIVEMSA), Shenzhen: IEEE, 2015.
- [100] Weiss, M. and Weiss, G., A derivation of the main results of the theory of H^p spaces, *Rev. Un. Mat. Argentina*, 1962, 20: 63-71.
- [101] 武伟, 八元数分析和钱方法在数字图像处理中的应用研究, 硕士论文, 广州: 华南师范大学, 2014.
- [102] Wu, M.Z., Wang, Y. and Li, X.M., Fast implementation of two dimensional Qian method and its application in digital watermarking, *Computer Engineering and Design*, 2016, 37(11): 3136-3140 (in Chinese).
- [103] Wu, M.Z., Wang, Y. and Li, X.M., An improved two dimensional Qian method and its application of image

- denoising, *J. South China Normal Univ. Nat. Sci. Ed.*, 2016, 48(4): 119-124 (in Chinese).
- [104] Yang, Y., Qian, T. and Sommen, F., Phase derivative of monogenic signals in higher dimensional spaces, *Complex Anal. Oper. Th.*, 2012, 6(5): 987-1010.
- [105] Yu, B. and Zhang, H.Z., The Bedrosian identity and homogeneous semi-convolution equations, *J. Integral Equ. Appl.*, 2008, 20(4): 527-568.
- [106] Zhang, L.M., A new time-frequency speech analysis approach based on adaptive Fourier decomposition, *Internat. Science Index, Electrical Computer Engineering*, 2013, 7(7): 938-942.
- [107] Zhang, L.M., Liu, N. and Yu, P.Y., A novel instantaneous frequency algorithm and its application in stock index movement prediction, *IEEE J. Sel. Top. Signal Process.*, 2012, 6(4): 311-318.
- [108] Zhang, L.M., Qian, T., Mai, W.X. and Dang, P., Adaptive Fourier decomposition-based Dirac type time-frequency distribution, *Math. Methods Appl. Sci.*, 2017, 40(8): 2815-2833.

A Novel Fourier Theory on Non-linear Phases and Applications

QIAN Tao

(Faculty of Science and Technology, University of Macau, 3001, Macau, P. R. China)

Abstract: Ever since the time of Fourier, positive frequency representation of signals has always been a central problem for physicists, mathematicians and signal analysts. Based on harmonic analysis and complex analysis methods, a mono-component function theory and a function (signal) representation theory based on mono-component functions have been being established during the past two decades. Being an original theory, it rapidly decomposes a signal into a sum of certain basic signals with positive nonlinear instantaneous frequency. The theory has roots in classical mathematics and can be generalized to vector-valued and matrix-valued signals defined on high-dimensional manifolds. It also leads to establishment of rational approximation in higher dimensional spaces. The theory of mono-component functions includes the mathematical definition of positive instantaneous frequencies and description of several most important mono-component function classes. The representation theory of mono-component functions includes Core Adaptive Fourier Decomposition (or Core AFD) and several variants, including Unwinding AFD, Cyclic AFD, and Pre-orthogonal AFD in reproducing kernel Hilbert spaces. In addition to the overview of theory and methods, this paper also provides two new proofs: the most general proof so far of convergence of adaptive decomposition based on maximal selection principle; and a proof of the necessity of reproducing kernel derivatives for parameter repetition. Finally, we specify some connections between this new development with the existing pure and applied mathematics, as well as some information on applications.

Keywords: Blaschke product; mono-component; Hardy space; inner and outer functions; adaptive Fourier decomposition; Beurling-Lax theorem; reproducing kernel Hilbert space