

# 算子方程基本问题解的再生核稀疏表示

献给张景中、杨路教授 85 华诞

钱涛<sup>1</sup>, 曲伟<sup>2</sup>, 黄勇<sup>3\*</sup>

1. 澳门科技大学澳门系统工程研究所, 澳门 999078;

2. 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875;

3. 广州大学计算科技研究院, 广州 510006

E-mail: tqian@must.edu.mo, quwei2019@bnu.edu.cn, yongh@gzhu.edu.cn

收稿日期: 2020-02-28; 接受日期: 2020-05-08; 网络出版日期: 2020-08-27; \* 通信作者

澳门科学技术发展基金 (批准号: FDCT0123/2018/A3) 和国家自然科学基金 (批准号: 11701118) 资助项目

**摘要** 在一个 Hilbert 空间中通过内积核定义的线性算子对应一个自然的再生核 Hilbert 空间结构. 本文将称其为  $\mathcal{H}\text{-}H_K$  结构. 这个结构本身内蕴一个基方法, 可以解答线性算子的若干最基本的问题, 包括确定或刻画其值域空间、解算子方程及解 Moore-Penrose 伪 - (广义 -) 逆算子问题. 在对已存在结果的简要综述之后, 本文的目的是建立  $\mathcal{H}\text{-}H_K$  结构下的预正交自适应 Fourier 分解 (pre-orthogonal adaptive Fourier decomposition, POAFD) 算法. 在这个方法之下导出上述 3 个问题的解的稀疏表示. 在逐次跟踪匹配的优化方法论中 POAFD 的优选原理保证了它在理论上和实用上的最优性. 它也具有算法上的可行性. 所提供的方法可有效地应用于具体实际问题, 包括信号与图像重构、常微分方程、偏微分方程和优化问题的数值解等.

**关键词** 再生核 Hilbert 空间 稀疏表示 算子方程 逆问题

**MSC (2010) 主题分类** 42A16, 42A20, 41A30, 30B99, 34K28, 35A35

## 1 引言

引言给出所需基本知识的综述, 提出本文关注的算子方程 3 个基本问题, 并给出用基方法的解答 (参见文献 [1, 2]). 由于是已存在理论的自然推论, 与基方法有关的某些内容没有注明出处, 作者默认为应该是已存在于文献中. 从第 2 节开始引入预正交自适应 Fourier 分解 (pre-orthogonal adaptive Fourier decomposition, POAFD) 的稀疏表示方法. 作为一种“非基”的表示方法, 后者是本文所提倡的解答一类广泛算子方程基本问题的新方法 (参见文献 [3]).

英文引用格式: Qian T, Qu W, Huang Y. Sparse representations in reproducing kernels of operator equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 209–224, doi: 10.1360/SSM-2020-0056

在一个由函数  $f$  构成的 Hilbert 空间中, 如果每一个点  $x$  上的估值泛函  $f(x)$  都是由该函数  $f$  与一个以该点为参数的该 Hilbert 空间函数  $k_x$  的内积给出, 即

$$f(x) = \langle f, k_x \rangle,$$

则称该 Hilbert 空间是一个再生核 Hilbert 空间 (reproducing kernel Hilbert space, RKHS), 其中参数化了的二元函数  $k_x(y) = k(x, y)$  称为该 RKHS 的 (唯一的) 再生核. 一个 Hilbert 空间为再生核 Hilbert 空间当且仅当它的每一个点的估值泛函是有界线性泛函 (Riesz 表现定理).

本研究所依据的公理化结构是从一个一般的 Hilbert 空间  $\mathcal{H}$  及其中的一个带参数的元  $h_p \in \mathcal{H}$  开始, 其中  $p \in \mathbf{E}$ , 集合  $\mathbf{E}$  是一个实的或复的 Euclid 空间的开子集, 带有从后者引出的拓扑结构. 通过  $\mathcal{H}$  上内积结构引出线性算子

$$Lf(p) \triangleq \langle f, h_p \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (1.1)$$

重要的事情是, 算子值域集合  $R(L) = \{F \mid \exists f \in \mathcal{H}, F = Lf\}$  在被赋予适当的范数之后, 形成一个 RKHS, 记为  $H_K$ , 其中  $K(q, p) = K_q(p) \triangleq \langle h_q, h_p \rangle_{\mathcal{H}}$ . 用  $\mathbb{C}^{\mathbf{E}}$  记全部从集合  $\mathbf{E}$  映到复数域  $\mathbb{C}$  上的函数的集合, 有  $F(p) = Lf(p) \in \mathbb{C}^{\mathbf{E}}$ . 记  $N(L)$  为使算子  $Lf = 0$  的函数  $f \in \mathcal{H}$  的集合, 称为  $L$  在  $\mathcal{H}$  中的零化子空间, 即

$$N(L) = \{f \in \mathcal{H} \mid L(f) = 0\}.$$

易证  $N(L)$  是  $\mathcal{H}$  中的闭集. 事实上, 如果  $f_n, f \in \mathcal{H}$ ,  $f_n \rightarrow f$  且  $L(f_n) = 0$ , 则有

$$|Lf(p)| = |\langle f - f_n, h_p \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|f - f_n\|_{\mathcal{H}} \|h_p\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0.$$

因而,  $Lf = 0, f \in N(L)$ . 因而有算子  $L$  的定义域空间  $\mathcal{H}$  的正交分解

$$\mathcal{H} = N(L) \oplus N(L)^{\perp},$$

其中  $N(L)^{\perp}$  是闭子空间  $N(L)$  在全空间  $\mathcal{H}$  中的正交补. 对于每一个  $f \in \mathcal{H}$ , 有唯一的分解式

$$f = f^- + f^+,$$

其中  $f^- \in N(L)$ ,  $f^+ \in N(L)^{\perp}$ . 本文也使用正交投影记号  $P_{N(L)^{\perp}}f = f^+, P_{N(L)}f = f^-$ , 其中  $P_{N(L)^{\perp}}$  和  $P_{N(L)}$  分别记由空间  $\mathcal{H}$  向闭子空间  $N(L)^{\perp}$  和  $N(L)$  的正交投影算子. 当成立  $F = Lf$  时, 总有  $Lf = Lf^+$ . 令  $R(L)$  记算子  $L$  的值域, 即

$$R(L) = \{F \mid \exists f \in \mathcal{H} \text{ 使得 } F = Lf\}.$$

设  $F \in R(L)$ , 则对于算子方程  $Lg = F$  的任何解  $g$  存在  $h \in N(L)$  使得  $g = f^+ + h$ . 由正交性, 有  $\|f^+\| \leq \|g\|$ . 因而, 对于  $F \in R(L)$ , 方程  $Lf = F$  的解  $f$  在最小模的要求下是存在且唯一的, 其等同于  $P_{N(L)^{\perp}}f = f^+$ .

赋予值域集合  $R(L)$  以适当的范数, 可使得它成为一个 RKHS, 记为  $H_K$ , 其中  $K$  为再生核. 事实上, 对于  $F = L(f) \in R(L)$ , 只需令

$$\|F\|_{H_K} \triangleq \|P_{N(L)^{\perp}}f\|_{\mathcal{H}}.$$

这个模的极化形式赋予  $R(L)$  一个具有再生核特性的内积结构, 记为  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_K}$ . 所形成的新 Hilbert 空间  $H_K$  在映射  $L$  之下等距同构于空间  $N(L)^\perp$ . 再生核  $K(p, q) = K_q(p)$  被定义为

$$K(p, q) = \langle h_p, h_q \rangle_{\mathcal{H}}.$$

现在证明, 对于每一个  $p \in \mathbf{E}$ , 有  $h_p \in N(L)^\perp$ , 并因而得出结论  $h_p = P_{N(L)^\perp}(h_p)$ . 事实上, 对于任一固定的  $p \in \mathbf{E}$ , 由于对所有的  $g \in N(L)$ ,

$$0 = L(g)(p) = \langle g, h_p \rangle_{\mathcal{H}},$$

因此有  $h_p \in N(L)^\perp$ . 下面证明再生核性质.

对于  $F \in H_K, P_{N(L)^\perp}f = f^+$ , 有  $Lf^+ = F$ . 因而, 对每一个  $q \in E$ , 由于  $K_q(p) = \langle h_q, h_p \rangle_{\mathcal{H}} = L(h_q)(p)$ , 因此有

$$\begin{aligned} \langle F, K_q \rangle_{H_K} &= \langle Lf, L(h_q) \rangle_{H_K} \\ &= \langle P_{N(L)^\perp}f, P_{N(L)^\perp}h_q \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle f^+, h_q \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= L(f^+)(q) \\ &= F(q), \end{aligned}$$

它是再生函数  $F$  在  $q \in \mathbf{E}$  点上的函数值. 我们将称上述的构造为  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构, 并且  $H_K$  为该结构下的典型值域空间 (canonical range space). 空间  $\mathcal{H}$  也被称为该  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构的底空间 (underlying space).

复 Hardy 空间是在调和分析、复分析和信号分析中有广泛联系及重要应用的空间. 下面以单位圆盘上的 Hardy 空间 (对应于周期函数) 为例来解释  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构. 上半复平面上的 Hardy 空间 (对应于整个时间域上的函数)、Stein-Weiss 意义下的管上的 Hardy 空间 (参见文献 [4, 5])、Clifford 代数意义下的上半 Euclid 空间和带状区域上的 Hardy 空间 (参见文献 [6, 7]) 等, 也都可以纳入  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构. 在单位圆情形下,  $\mathcal{H} = L^2(\partial\mathbf{D})$ , 其中  $\mathbf{D}$  为复单位圆盘,  $\partial\mathbf{D}$  为单位圆周. 空间  $L^2(\partial\mathbf{D})$  配备有内积

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\partial\mathbf{D})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \bar{g}(e^{it}) dt,$$

在其下  $L^2(\partial\mathbf{D})$  成为一个 Hilbert 空间, 但不是 RKHS. 此例中,  $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ . 对于  $p \in \mathbf{D}$ , 函数

$$h_p(e^{it}) = \frac{1}{1 - \bar{p}e^{it}} \in L^2(\partial\mathbf{D})$$

是单位圆上的 Szegő 核, 为单复变量分析中的 Cauchy 核在单位圆弧长测度内积中的形式. 对于  $f \in L^2(\partial\mathbf{D})$ ,  $F(p) = \langle f, h_p \rangle_{L^2(\partial\mathbf{D})}$  即是边界数值  $f$  在单位圆周上的 Cauchy 积分. 此时典型值域空间  $H_K$  等同于复的 Hardy 空间

$$H^2(\mathbf{D}) = \left\{ F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C} \mid F \text{ 解析, } \|F\|_{H^2(\mathbf{D})}^2 = \sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |F(re^{it})|^2 < \infty \right\}.$$

一个  $\mathbf{D}$  上的函数  $F(p)$  属于典型值域空间  $H^2(\mathbf{D})$  当且仅当  $F(z)$  在开单位元内有 Taylor 级数展开式  $F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k p^k$ , 其中  $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ . 在集合论意义下  $H^2(\mathbf{D}) = R(L)$ , 而在赋范空间的意义上  $H^2(\mathbf{D}) = H_K$ , 其中再生核  $K$  的计算用到 Cauchy 公式:

$$K(q, p) = K_q(p) = \langle h_q, h_p \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{1 - \bar{q}p}.$$

而  $K_q$  对于  $F \in H_K$  的再生性质验证为

$$\langle F, K_q \rangle_{H_K} = \langle f^+, h_q \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, h_q \rangle_{\mathcal{H}} = F(q).$$

特别地, 成立关系式  $F(p) = Lf(p) = Lf^+(p) = \langle f^+, h_p \rangle_{L^2(\partial\mathbf{D})}$ . 算子  $L$  是从  $f^+$  到  $F$  的等距同构映射. 同时所有的  $f^-$  非平凡地构成算子  $L$  的零化子空间  $N(L)$ , 后者为圆外 Hardy 空间. 上述复 Hardy 空间  $H^2(\mathbf{D})$  定义中的内积可被证明等同于通过同构映射  $L$  所对应的  $N(L)^\perp$  中的函数在底空间  $\mathcal{H} = L^2(\partial\mathbf{D})$  上的内积, 这验证了典型的  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构.

用记号  $H$  表示圆周 Hilbert 变换, 则任一  $\partial\mathbf{D}$  上的  $L^2$ - 函数  $f$  可分解为  $f = \tilde{f}^+ + \tilde{f}^-$ , 其中  $\tilde{f}^+(e^{it}) = (1/2)(f + iHf)(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$ ,  $\tilde{f}^-(e^{it}) = (1/2)(f - iHf)(e^{it}) = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k e^{ikt}$ . 定义在边界上的  $\tilde{f}^\pm$  在信号分析领域被称为  $f$  的解析及反解析信号. 著名的 Plemelj 定理旨在确定  $F = Lf = Lf^+$  的非切向边界极限等于  $\tilde{f}^+$ . 介于 3 个 Hilbert 空间  $F = Lf \in H_K$ 、 $f^+ \in N(L)^\perp \subset \mathcal{H}$  和  $\tilde{f}^+ \in \{f \in \mathcal{H} \mid f(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}, \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| < \infty\}$  之间的等距同构关系是经典调和分析及解析函数边值问题的主要研究课题以及进一步有关理论发展的基础.

Hardy 空间完美地契合  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构, 宛如是说  $\mathcal{H}$ - $H_K$  是特为复 Hardy 空间订做的. 其实不然. 一类广泛的 Hilbert 空间及其上的线性算子都装配有相同的  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构. 特别地, 一般的及加权的 Bergman、各种类型的 Paley-Wiener 及 Sobolev 空间, 一般的积分算子方程、常微分算子方程及偏微分算子方程, 以及优化问题等, 都可以纳入  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构. 本文的目的是将近十年来从 Hardy 空间特殊场合所发展出来的应用调和分析方法 POAFD 推广到一般的  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构, 从而高效地解决与后者有关的广泛的理论及实际问题. 由所定义的  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构容易看出它包含了一类广泛的积分算子. 它事实上也包含微分算子. 在微分算子情形下底空间  $\mathcal{H}$  本身是一个 RKHS. 令  $f$  属于一个 RKHS,  $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{K}}$ , 具有再生核  $\tilde{K}$ . 因而,

$$f(x) = \langle f, \tilde{K}_x \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{K}}}.$$

令  $P$  是一个多变量的多项式. 在记号  $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_n)$  下有

$$P(\partial)f(x) = \langle f, P(\partial)\tilde{K}_x \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{K}}},$$

后者即是用内积核表示的算子. 在微分算子情形下底空间  $\mathcal{H}$  通常为适当的 Sobolev 空间, 后者本身为 RKHS, 或是它们的子空间. 在  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构下存在 3 个奠基性的问题, 它们是

- (i) 如何实际计算像函数  $F(p) = \langle f, h_p \rangle_{\mathcal{H}}$ ?
- (ii) 给出一个像空间函数  $F \in R(L)$ , 如何快速有效地计算其逆问题的解  $F = Lf$ , 其中  $\|f\| = \min\{\|g\| \mid Lg = F\}$ ?

(iii) 数值上快速有效地解答 Moore-Penrose 伪 - (广义 -) 逆问题: 假设  $R(L) = H_K$  被包含于另一个 Hilbert 空间  $\tilde{\mathcal{H}}$  中作为其闭子空间. 对于任何给定的  $F \in \tilde{\mathcal{H}}$ , 找到最小范数的  $f \in \mathcal{H}$ , 其使得数量  $\|Lf - F\|_{\tilde{\mathcal{H}}}$  被最小化. 对于这些基本问题已然存在海量的研究与相关文献, 其中也有相当大的一部分与再生核 Hilbert 空间的方法有关 (参见文献 [1, 8, 9]). 为了阐述本文所提出的  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构下的预正交自适应 Fourier 分解 (POAFD) 算法, 需要以简明及统一的方式总结所称之为的基方法. 由于方法的直接性, 它应该已存在在文献中.

在  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构下,  $H_K$  是一个 RKHS. 单位模化了的再生核  $E_q = \frac{K_q}{\|K_q\|}$  ( $q \in \mathbf{E}$ ) 形成一个字典, 即集合  $\{E_q \mid q \in \mathbf{E}\}$  所张成的线性空间在  $H_K$  中是稠密的. 后者是再生核性质的推论. 如果作为参数的集合  $\mathbf{E}$  是一个开集, 且从  $\mathbf{E}$  到  $\{E_q \mid q \in \mathbf{E}\}$  的映射相对于  $\mathcal{H}$  是连续的, 则可以选择出一个由可数多

个函数  $\{E_{q_n} \mid q_n \in \mathbf{E}, n = 1, 2, \dots\}$  构成的完备系统  $(q_1, \dots, q_n, \dots)$  各不相同). 由 Gram-Schmidt (G-S) 正交化程序,  $H_K$  包含一个正交基, 记为  $\{B_1, B_2, \dots\}$ , 其中

$$B_n = \frac{E_{q_n} - \sum_{l=1}^{n-1} \langle E_{q_n}, B_l \rangle B_l}{\sqrt{1 - \sum_{l=1}^{n-1} |\langle E_{q_n}, B_l \rangle|^2}}.$$

相应地有

$$\mathcal{A}_n \mathcal{B}_n = \mathcal{E}_n, \quad \mathcal{B}_n = \mathcal{A}_n^{-1} \mathcal{E}_n, \quad (1.2)$$

这里对于每一个  $n$ , 矩阵  $\mathcal{A}_n$  是秩为  $n$  的  $n \times n$  阶矩阵, 其一般项为  $\langle E_i, B_j \rangle_{H_K}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , 矩阵  $\mathcal{B}_n$  和  $\mathcal{E}_n$  皆为  $n \times 1$  阶的矩阵, 它们的项分别是  $B_l$  和  $E_l$ ,  $l = 1, \dots, n$ . 由于对于全部  $i < j$  有性质  $\langle E_i, B_j \rangle_{H_K} = 0$ , 对于有限  $n$  成立的关系式 (1.2), 可以写成为无穷维矩阵的形式

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{E}. \quad (1.3)$$

为解答问题 (i) 只需将  $F \in H_K$  在基  $\{B_l\}_{l=1}^{\infty}$  中展开:

$$F = F_{\mathcal{B}}\mathcal{B}, \quad (1.4)$$

其中  $F_{\mathcal{B}}$  是一个无穷行向量矩阵, 由项  $\langle F, B_l \rangle_{H_K}$  构成, 而  $\mathcal{B}$  是一个无穷列向量矩阵, 由  $B_l$  构成. 下面解答逆算子问题 (ii). 首先注记, 由于  $L$  是一个从  $N(L)^\perp$  到  $H_K$  的等距同构, 局限在后两个空间中,  $L^{-1}$  是存在的, 作为从  $H_K$  到  $N(L)^\perp$  上的等距同构. 我们有

$$L^{-1}F = F_{\mathcal{B}}L^{-1}\mathcal{B} = F_{\mathcal{B}}\mathcal{A}^{-1}L^{-1}\mathcal{E}, \quad (1.5)$$

其中  $L^{-1}\mathcal{E}$  是由  $L^{-1}E_{q_n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 构成的无穷列向量矩阵. (1.5) 中第一个关系式的成立是基于  $L^{-1}\mathcal{B}$  各项之间正交性的一个 Cauchy 序列论证 (参见下面定理 3.1 的证明). 我们有明晰的表达式: 对于任意  $q \in \mathbf{E}$ , 有

$$L^{-1}E_q = \frac{L^{-1}K_q}{\|K_q\|_{H_K}} = \frac{h_q}{\|h_q\|_{\mathcal{H}}}.$$

用  $\mathcal{T}$  记以  $h_{q_n}/\|h_{q_n}\|_{\mathcal{H}}$  ( $n = 1, \dots$ ) 为一般项的无穷列向量, 最终有

$$L^{-1}F = F_{\mathcal{B}}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{T}. \quad (1.6)$$

最后解 Moore-Penrose 伪逆问题 (iii). 基本的假设是,  $H_K$  被包含在一个 Hilbert 空间  $\tilde{\mathcal{H}}$  中作为其闭子空间. 令  $F$  为给定的  $\tilde{\mathcal{H}}$  空间的函数. 解答策略是, 将  $F$  在  $H_K$  中的投影  $G$  表示为  $\mathcal{B}$ -级数. 为导出  $G$  的表达式, 注意到  $F - G$  正交于  $K_q$ , 有

$$\langle F, K_q \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = \langle G, K_q \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = \langle G, K_q \rangle_{H_K} = G(q).$$

因而  $G = P_{H_K}(F)$ . 进而,

$$G = \sum_{l=1}^{\infty} \langle G, B_l \rangle_{H_K} B_l.$$

用 (ii) 的解的表达式, 有

$$L^{-1}G = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \langle F, K_{\{\cdot\}} \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}, B_l \rangle_{H_K} L^{-1}B_l. \quad (1.7)$$

用矩阵记号, 有

$$L^{-1}G = \{\langle F, K_{\{\cdot\}} \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}\}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}^{-1} L^{-1} \mathcal{E} = \{\langle F, K_{\{\cdot\}} \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}\}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{T},$$

其中  $\{\langle F, K_{\{\cdot\}} \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}\}_{\mathcal{B}}$  是由  $\langle \langle F, K_{\{\cdot\}} \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}, B_l \rangle_{H_K}$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) 构成的行矩阵. 用  $S_1$ 、 $S_2$  和  $S_3$  分别记问题 (i)–(iii) 的解, 由 (1.4)、(1.6) 和 (1.7), 有下面的定理:

**定理 1.1** 问题 (i)–(iii) 的解分别为

$$S_1 = F_{\mathcal{B}} \mathcal{B}, \quad (1.8)$$

$$S_2 = F_{\mathcal{B}} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{T}, \quad (1.9)$$

以及

$$S_3 = \{\langle F, K_{\{\cdot\}} \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}\}_{\mathcal{B}} \mathcal{A}^{-1} \mathcal{T}. \quad (1.10)$$

**注 1.1** 上述问题 (iii) 是基于假设  $H_K$  是  $\tilde{\mathcal{H}}$  的一个闭子空间. 这个假设使得这个问题的解很直接. 满足这个假设的例子多见于  $H_K$  为解析函数空间的情形. 例如, 在单或多复变区域上的  $L^2$ -Bergman 空间相对于同一个区域上的  $L^2$ -空间就属于这种情形.  $R(L)$  作为一个较大的 Hilbert 空间的一个集合论子集的一般情形本文不予讨论. 这时候恒同嵌入算子  $I$  一般不是一个等距同构. 满足压缩嵌入的情形  $\|I(f)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq \|f\|_{H_K}$  实则等价于存在一个有界算子  $\tilde{L}: H_K \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$  的情形. 这种一般情形的例子包括从一个较高阶的 Sobolev 空间到一个较低阶 Sobolev 空间的映入.

我们记, 上述解的公式依赖于基系统  $\mathcal{E}$  和  $\mathcal{B}$ 、它们之间的转换矩阵  $\mathcal{A}$  及有关它们的繁复计算. 级数收敛的速度或逼近的精度对于一般给出的数据难于估计. 从第 2 节开始将引入预正交自适应 Fourier 分解 (POAFD) 的方法, 并贯穿全文. 该方法已经在信号及图像分析、以及在系统辨识的理论与实践取得广泛的应用. 本文的目的是, 通过再生核 Hilbert 空间的一般结构将此方法推广到积分方程、常微分方程及偏微分方程、优化理论等的数值计算中. 相对于一般基方法, POAFD 通过小数量的运算给出误差可接受解的有效逼近式.

本文余下内容结构如下. 第 2 节引入 Hilbert 空间中的 POAFD 的一般理论及算法. 第 3 节用 POAFD 来解答所提出的 3 个基本问题. 作为一个普适的算法, 一旦典型值域空间被确切地得到, 用  $\mathcal{H}$ - $H_K$  中自包含的存在的机制, 诸基本问题迎刃而解, 且 POAFD 算法确保了计算上的高效性 (参见文献 [10, 11]). 第 4 节作为  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构下数值计算最简单的例子给出实数轴上能量有限函数的 Poisson 核线性组合的逼近. 该实用计算方法对应于  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构下函数集合  $h_p$  ( $p \in \mathbf{E}$ ) 的线性组合在  $\mathcal{H}$  中稠密的情形. 第 5 节给出全文的总结.

## 2 POAFD: 一个稀疏表示方法

POAFD 是基于 Hardy 空间中的自适应 Fourier 分解 (adaptive Fourier decomposition, AFD) 方法, 后者是对于  $F \in H^2(\mathbf{D})$ , 以及么模化了的 Szegö 核构成的字典  $\{e_a\}_{a \in \mathbf{D}}$ ,

$$e_a(z) = \frac{\sqrt{1 - |a|^2}}{1 - \bar{a}z}, \quad z \in \mathbf{D},$$

进行如下的迭代: 记  $F_1 = F$ ,

$$F(z) = \langle F_1, e_{a_1} \rangle e_{a_1}(z) + \frac{F_1(z) - \langle F_1, e_{a_1} \rangle e_{a_1}(z)}{\frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z}} \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z}.$$

上式对于任意  $a_1 \in \mathbf{D}$  是一个代数恒等式. 由于右边第一项是  $F_1$  向  $e_{a_1}$  生成的一维子空间的投影, 因此, 等式右边两项是正交的. 记

$$F_2(z) = \frac{F_1(z) - \langle F_1, e_{a_1} \rangle e_{a_1}(z)}{\frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z}}.$$

使用 Möbius 变换在单位圆边界上模为 1 的性质, 有

$$\|F\|^2 = |\langle F_1, e_{a_1} \rangle|^2 + \|F_2\|^2.$$

选择

$$a_1 = \arg \max\{|\langle F_1, e_a \rangle|^2 \mid a \in \mathbf{D}\} \in \mathbf{D}, \quad (2.1)$$

其被证明了的可行性被称为 AFD 极大选择原理<sup>[12]</sup>. 第一步的分解式可进一步写为

$$F(z) = \langle F_1, e_{a_1} \rangle e_{a_1}(z) + F_2(z) \frac{z-a_1}{1-\bar{a}_1 z}.$$

重复此优选 - 迭代程序, 得到

$$F(z) = \sum_{k=1}^n \langle F_k, e_{a_k} \rangle B_k(z) + F_{n+1}(z) \prod_{k=1}^n \frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}, \quad (2.2)$$

其中  $B_k(z) = e_k(z) \prod_{l=1}^{k-1} \frac{z-a_l}{1-\bar{a}_l z}$  对于  $k = 1, \dots, n$  构成  $n$ -Takenaka-Malmquist 系统, 后者对应于  $e_{a_1}, \dots, e_{a_n}$  形成的 G-S 正交标准化系统 (这里, 如果  $a_k$  在  $k$ -序列  $(a_1, \dots, a_k)$  中的重复度为  $l(k)$ , 则在 G-S 正交化程序中  $e_{a_k}$  应该被  $\tilde{e}_{a_k}$  所代替, 其中  $\tilde{e}_a$  是  $e_a$  对于  $\bar{a}$  的  $l(k) - 1$  阶导数),  $a_k$  遵从 AFD 极大选择原理

$$a_k = \arg \max\{|\langle F_k, e_a \rangle|^2 \mid a \in \mathbf{D}\} \in \mathbf{D}, \quad (2.3)$$

其中导出余项

$$F_k(z) = \frac{F(z) - G_k(z)}{\prod_{l=1}^{k-1} \frac{z-a_l}{1-\bar{a}_l z}}, \quad (2.4)$$

这里

$$G_k(z) = F(z) - \sum_{l=1}^{k-1} \langle F_l, e_{a_l} \rangle = F_k(z) \prod_{l=1}^{k-1} \frac{z-a_l}{1-\bar{a}_l z}$$

为第  $k$ -阶的标准余项. 基于极大选择原理 (2.3) 可证明  $F$  有快速收敛的级数展开式 (参见文献 [12])

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle F_k, e_{a_k} \rangle B_k(z).$$

与各种类型的跟踪匹配 (或贪婪算法) 相比上述 AFD 式分解有下述重要优点. 第一, 无需使用 G-S 程序, 正交标准化系统  $\{B_k\}$  自动形成, 而且包括有重复参数的情形, 后者在贪婪算法理论上必不可缺, 却在文献中缺乏讨论. 第二, AFD 可推广到任何可分的 Hilbert 空间: 在一般的 Hilbert 空间中类似于导出余项  $F_k$  作用的函数可能不存在 (参见文献 [10, 13, 14]), 因而, 上述的 AFD 的每一个细节不是总可以推行 (例外情形参见文献 [15, 16]). 但是由于有关系式

$$\langle F_k, e_{a_k} \rangle = \langle G_k, B_k \rangle = \langle F, B_k \rangle, \quad (2.5)$$

对于  $k > 1$ , 实际上可以用预正交极大选择原理

$$a_k = \arg \max\{|\langle F, B_k \rangle|^2 \mid a_1, \dots, a_{k-1} \text{ 固定}, a \in \mathbf{D}\} \quad (2.6)$$

来代替 AFD 极大选择原理 (2.3). 因而, 受惠于关系式 (2.5), AFD 理论及算法可以推广到一般的可分 Hilbert 空间. 经典 Hardy 空间中的 POAFD 自动蜕化成 AFD. 预正交极大选择原理 (2.6) 本身宣称了最佳的跟踪匹配原理, 它同时也确定了 POAFD 在贪婪算法范畴中的最佳性 (参见文献 [17, 18]). AFD 的第三个特点是, 它与 Beurling-Lax 定理, 与前移、后移算子及有关的不变子空间理论, 以及插值理论有密切的联系. 因而, AFD 启发在其他解析函数空间中建立类似的理论, 特别是建立 Blaschke 乘积的理论. 后者在逼近论及系统辨识方面有效果显著的应用. AFD 的第四个特点是展开式的每一个函数  $B_k$  在  $a_1 = 0$  时具有正的解析瞬时频率 (参见文献 [12]). 原创 AFD 算法的推动力是信号的解析正频率分解. 将较晚发表的 Blaschke 乘积解绕方式的展开也称作 AFD 类型展开, 缘于后者也是基于 Blaschke 乘积 (参见文献 [19-22]).

令  $H_K$  为  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构中具有核函数  $K(p, q) = K_q(p) = \langle h_q, h_p \rangle_{\mathcal{H}}$  的 RKHS. 为了讨论参数的重复选取, 假定再生核  $K_q$  ( $q \in \mathbf{E}$ ) 相对于参数  $q$  有任意阶的方向导数.

为简单计, 假定  $\mathbf{E}$  是复平面上的一个开集. 令  $\{q_1, \dots, q_n, \dots\}$  是一个  $\mathbf{E}$  中的无穷序列. 相关的高阶核定义为

$$\tilde{K}_n = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial q} \right)^{l(n)-1} K_q \right] (q_n), \quad (2.7)$$

其中  $l(n)$  是  $q_n$  在  $n$  元序列  $\{q_1, \dots, q_n\}$  中的重复次数. 为了标明与  $q_n$  的关系, 下面将  $\tilde{K}_n$  记为  $\tilde{K}_{q_n}$  ( $n = 1, \dots$ ), 虽然后一记法有失严格性. 在以下的论述中, 需要记住高阶核像再生核一样是两个变量的函数, 其中一个被视为参数. 下面说明, 为了实施预正交极大选择原理, 高阶核是必须的. 假设已有一个  $n-1$  元组  $\{q_1, \dots, q_{(n-1)}\}$ , 其中元素可以重复, 因而对应一组  $n-1$  个高阶核  $\{\tilde{E}_{q_1}, \dots, \tilde{E}_{q_{n-1}}\}$ . 设后者的 G-S 正交化为  $\{B_1, \dots, B_{n-1}\}$ . 希望找到一个参数  $q_n$  其对应于

$$\sup\{|\langle F, B_n^q \rangle| : q \in E, q \neq q_1, \dots, q_{n-1}\}, \quad (2.8)$$

其中  $B_n^q$  使得  $\{B_1, \dots, B_{n-1}, B_n^q\}$  是  $\{\tilde{K}_{q_1}, \dots, \tilde{K}_{q_{n-1}}, E_q\}$  的 G-S 正交化. 注意最后一项不是高阶核, 因为假定  $q$  不同于  $q_1, \dots, q_{(n-1)}$ . Cauchy-Schwarz 不等式表明由 (2.8) 所定义的上确界是有限存在的, 但是使得  $|\langle F, B_n^q \rangle|$  能够取到 (2.8) 中的上确界且与  $q_1, \dots, q_{n-1}$  相异的  $q$  不总是存在. 如果  $H_K$  满足边界趋零性质:  $\forall F \in H_K$ ,

$$\lim_{q \rightarrow \partial \mathbf{E}} \langle F, E_q \rangle = 0,$$

则有一个紧的论述: 存在一列  $q^{(l)}$ , 每个相异于  $q_1, \dots, q_{n-1}$ , 有  $\lim_{l \rightarrow \infty} q^{(l)} = q_n \in \mathbf{E}$  使得

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |\langle G_n, B_n^{q^{(l)}} \rangle| = \sup\{|\langle G_n, B_n^q \rangle| : q \in E, q \neq q_1, \dots, q_{n-1}\}.$$

在这个极限程序下得到的  $q_n$  不排除有可能与某些  $q_1, \dots, q_{n-1}$  重复. 记重复度为  $l(n)$ . 现在断言极限函数

$$\lim_{l \rightarrow \infty} B_n^{q^{(l)}},$$

除了一个模为 1 的常数外, 相等于  $\{B_1, \dots, B_{n-1}, \tilde{K}_n\}$  的正交化序列  $\{B_1, \dots, B_{n-1}, B_n\}$  中的函数  $B_n$ , 此处  $\tilde{K}_n$  由 (2.7) 定义, 其中

$$B_n^{q^{(l)}} = \frac{K_{q^{(l)}} - \sum_{k=1}^{n-1} \langle K_{q^{(l)}}, B_k \rangle_{H_K} B_k}{\sqrt{\|K_{q^{(l)}}\|^2 - \sum_{k=1}^{n-1} |\langle K_{q^{(l)}}, B_k \rangle_{H_K}|^2}}. \quad (2.9)$$

现设  $l(n) \geq 2$ , 若这个条件不满足, 则  $q_n$  不与前面任何已选出的参数重复, 下面的论述将不需要. 记  $T_q(q_n)$  为函数  $K_q$  在  $q_n$  点的  $(l(n) - 2)$ - 阶的 Taylor 展开式. 对每一个固定的  $l$ , 在 (2.9) 的右端用  $K_{q^{(l)}} - T_{q^{(l)}}(q_n)$  置换每一出现的项  $K_{q^{(l)}}$ . 注意到插入的项  $T_{q^{(l)}}(q_n)$  在  $B_1, \dots, B_{n-1}$  所张成的 (函数) 线性空间里, 因而置换之后右端与左端仍旧保持相等. 在做过此置换的 (2.9) 的右端中令  $q^{(l)} \rightarrow q_n$ , 并用涉及  $K_q$  的  $(l(n) - 1)$ - 阶导数的 Lagrange 型余项代替  $K_{q^{(l)}} - T_{q^{(l)}}(q_n)$ , 得到所断言的结果. 该 POAFD 的思想最早形成于文献 [10, 11], 其后在不同的场合有应用及发展 (参见文献 [13, 14, 23]). 最先比较完备的论述参见文献 [24], 等价的英文版形式参见文献 [25].

基于上述结果得到快速收敛的 POAFD 表达式

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} \langle F, B_k \rangle B_k,$$

此处  $\{B_1, \dots, B_k\}$  是应用预正交极大选择原理选出的  $k$ - 序列  $\{\tilde{K}_{q_1}, \dots, \tilde{K}_{q_k}\}$  的 G-S 正交化.

**注 2.1** 在实际应用预正交极大选择原理时可以避免高阶核. 只需选择诸  $q_1, \dots, q_n, \dots$  各不相同, 同时对于一个  $0 < \rho < 1$ , 满足

$$|\langle F, B_n^{q_n} \rangle| \geq \rho \sup\{|\langle F, B_n^q \rangle| : q \in E, q \neq q_1, \dots, q_{n-1}\}.$$

该种算法称为弱预正交自适应 Fourier 分解 (weak POAFD, WPOAFD, 初见于文献 [10, 11]).

**注 2.2** Hilbert 空间的再生核结构对于 POAFD 算法是便利的, 但不是必需的: Hilbert 空间中只要有一个字典 (任何可分的 Hilbert 空间具有一个字典), 就可以施行 POAFD 算法. 基于引入的完备字典, 文献 [10, 11] 在存在一个字典的前提下提出及发展了 POAFD 的算法 (文献中最初称为 P-OGA). 方向导数的引入最先见于文献 [26].

如果被展开的函数  $F$  属于空间

$$\mathcal{M}_M = \left\{ F \in H_K \mid \exists \{c_n\} \text{ 和 } \{K_{q_n}\} \text{ 使得 } F = \sum_{n=1}^{\infty} c_n K_{q_n} \text{ 和 } \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq M \right\},$$

则对标准余项的  $O(\sqrt{n})$  收敛阶可以被证明:

$$\left\| F - \sum_{k=1}^n \langle F, B_k \rangle_{H_K} B_k \right\|_{H_K} \leq \frac{M}{\sqrt{n}}.$$

我们注记这个收敛阶与 Shannon 展开式的收敛阶相同. 后者是对于有限带宽的、在无穷远有有限指数级增长的整函数. POAFD 的同样收敛阶可以是对于不光滑的能量有限函数. 在实际应用中, 它给出快速得多的收敛性. 像 Hardy 空间中的 AFD 一样, POAFD 展开中的正交标准化系统  $\{B_1, \dots, B_n, \dots\}$  不必须是原空间的一组基, 但它有效及快速地展开给定的函数. 在单位圆内 Hardy 空间的情形, 对应的 TM (Takenaka-Malmquist) 系统张成一个后移不变子空间, 其正交补是 Beurling 意义下的前移不变子空间, 即  $\phi H^2$ , 其中  $\phi$  是所有选出的参数 (包括重复选取) 所对应的 Blaschke 乘积. 正是这个由极大选择原理确定的“非基”性质给出了优化的自适应逼近. AFD 和 POAFD 及其他有关算法的代码可参考网页 <http://www.fst.umac.mo/en/staff/fsttq.html>.

**注 2.3** AFD 及它的一般化 POAFD 有两个方向上的发展. 一个可称为最佳  $n$  核 (字典元) 逼近. 它是 AFD 和 POAFD 的进一步优化, 旨在同时取  $n$  个参数使得对应的  $n$ - 阶逼近达到全局最优. 后者明显优于 AFD 和 POAFD 对于  $n$  个参数的接续选取. 具有再生核或字典的 Hilbert 空间最佳  $n$  核 (字典元) 逼近问题不仅产生于实际, 而且受数学中  $n$ - 阶最佳有理逼近算法开放问题的推动 (best approximation by rational functions of degree not exceeding  $n$ ). 虽然该问题解的存在性早已证明 (参见文献 [27]), 但是全局最优解的数学算法迄今还是一个未解决的问题. 现存的算法都有可能陷入局部极值 (参见文献 [28–31]). 其中循环 AFD (cyclic AFD) 及对它的梯度下降法改善版<sup>[31]</sup> 能够被推广而得到满足一定边界趋零性质的 RKHS 中的最佳  $n$ - 核逼近的实用算法. 第二个发展的方向是某些 Hilbert 空间中的 Blaschke 乘积型的函数及连带的插值问题. 在某些 Hilbert 空间中可以像形成 Hardy 空间中的 Takenaka-Malmquist 系统一样, 由 Szegö 核与 Blaschke 函数的乘积, 或算子的接续作用, 来构成优美的再生核正交标准化系统 (参见文献 [12, 15, 16]). 但是在大多数空间里没有这样明晰优美的理论, 正交标准系须用 G-S 程序构造, 而且不易证明具有上述 Szegö-Blaschke 乘积结构.

POAFD 算法的具体的例子可参见文献 [7, 13, 14, 23]. AFD 和 POAFD 算法在信号与图像处理及在系统辨识或模型约化 (model reduction) 实际问题中的应用可参见文献 [32–36].

### 3 问题 (i)–(iii) 的 POAFD 型稀疏表示解

POAFD 给出问题 (i) 的快速收敛解. 进一步, 后者蕴涵 (ii) 和 (iii) 的快速收敛解. 本节回归到  $\mathcal{H}$ - $H_K$  的结构.

#### 3.1 问题 (i) 的稀疏解: $F \in H_K$ 的 POAFD 展开

作为上一节的结论有

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle F, B_k \rangle_{H_K} B_k = F_B \mathcal{B} = F_B \mathcal{A}^{-1} \mathcal{K}, \quad (3.1)$$

其中  $F_B$  是由  $\langle F, B_l \rangle_{H_K}$  构成的无穷行向量;  $\mathcal{B}$  是由  $B_l$  构成的无穷列向量, 这里  $\{B_1, \dots, B_n\}$  为  $\{\tilde{K}_{q_1}, \dots, \tilde{K}_{q_n}\}$  的 G-S 正交标准化系统, 此处  $q_n$  ( $n = 1, \dots$ ) 是为依照 POAFD 算法选出的无穷参数序列. 用  $\mathcal{K}$  记  $\tilde{K}_{q_k}$  形成的无穷列向量, 且  $\mathcal{A}$  为由系统  $\mathcal{B}$  到系统  $\mathcal{K}$  的无穷阶转换矩阵, 满足性质  $\langle \tilde{K}_{q_i}, B_j \rangle_{H_K} = 0, i < j$ .

#### 3.2 逆问题 (ii) 的稀疏解

$\mathcal{H}$ - $H_K$  结构确保  $L$  为一个介于  $N(L)^\perp$  与  $H_K$  之间的等距同构. 因而存在逆算子  $L^{-1}$ , 其将  $F \in H_K$  映到  $f^+ \in N(L)^\perp$ , 即  $L^{-1}F = f^+$ , 特别地,  $L^{-1}K_q = h_q, q \in E$ . 由此自然得到逆问题的解的存在唯一性. 下面推导解的级数表达式. 用 POAFD 将  $F$  自适应地展开:

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} \langle F, B_k \rangle_{H_K} B_k. \quad (3.2)$$

等距同构映射  $L^{-1}$  将标准化正交的系统  $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$  映成标准化正交的系统  $\{L^{-1}B_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

**定理 3.1** 在 POAFD 的参数选择  $q_1, \dots, q_n, \dots$  之下, 在空间  $\mathcal{H}$  中有分解式

$$S_2 = L^{-1}F = \sum_{k=1}^{\infty} \langle F, B_k \rangle_{H_K} L^{-1}B_k.$$

在矩阵记法下,

$$S_2 = F_B A^{-1} L^{-1} \mathcal{K}, \quad (3.3)$$

此处  $F_B$ 、 $B$ 、 $A$  和  $\mathcal{K}$  在 (3.1) 中定义,  $L^{-1}\mathcal{K}$  为由  $L^{-1}\tilde{K}_{q_n}$  ( $n = 1, \dots$ ) 构成的函数的无穷列向量. 采用  $n$ -截断矩阵, 对  $F \in \mathcal{M}_M$ , 有

$$\|L^{-1}F - F_B A_n^{-1} L^{-1} \mathcal{K}_n\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{M}{\sqrt{n}}. \quad (3.4)$$

除了估计式 (3.4) (依赖于 POAFD 的一般理论, 参见文献 [10, 11]), 定理其他结论都是自明的. 为了有助于熟悉  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构, 选择给出证明的主要步骤.

**定理 3.1 的证明**  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构蕴涵解  $f^+ = L^{-1}F$  的存在唯一性. 由于  $L^{-1}$  是  $H_K$  与  $N(L)^\perp$  之间的等距同构, 系统  $\{L^{-1}B_k\}$  在闭子空间  $N(L)^\perp$  中, 像系统  $\{B_k\}$  在  $H_K$  中一样, 是标准正交的. 由于  $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle F, B_k \rangle_{H_K}|^2 < \infty$ , 作为 Riesz-Fisher 定理的结论, 存在一个函数  $g$  在  $N(L)^\perp$ , 使得

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \langle F, B_k \rangle_{H_K} L^{-1}B_k.$$

需要证明  $f^+ = g$ . 这只需证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f^+ - \sum_{k=1}^n \langle F, B_k \rangle_{H_K} L^{-1}B_k \right\|_{\mathcal{H}}^2 = 0. \quad (3.5)$$

用算子  $L^{-1}$  的等距同构性质和 (3.2), 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| L^{-1}F - L^{-1} \left( \sum_{k=1}^n \langle F, B_k \rangle_{H_K} B_k \right) \right\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| F - \sum_{k=1}^n \langle F, B_k \rangle_{H_K} B_k \right\|^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle F, B_k \rangle_{H_K} B_k \right\|^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle F, B_k \rangle_{H_K}|^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中最后一个等式是由于 POAFD 的收敛性质. 证明完毕.  $\square$

同时也证明了  $f^+ = L^{-1}F$  的级数表达式的收敛速度与  $F$  的 POAFD 展开的收敛速度相同.

### 3.3 Moore-Penrose 伪逆问题 (iii)

本文中问题 (iii) 是在下述条件下求解:  $H_K$  是一个较大的 Hilbert 空间  $\tilde{\mathcal{H}}$  的闭子空间. 现给出一个函数  $F \in \tilde{\mathcal{H}}$ , 求一个函数  $f \in \mathcal{H}$  使得  $\|f\|_{\mathcal{H}} = \min\{\|\tilde{f}\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \mid \tilde{f} : \|L\tilde{f} - F\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \text{ 最小}\}$ . 解答分为两步.

**第 1 步** 在全部  $\tilde{G} \in H_K$  中找到使得  $\|F - \tilde{G}\|$  达到最小值的那个  $\tilde{G}$ , 记其为  $G$ . 如同在第 1 节基方法解答中所得到的,  $G$  是  $F$  向  $H_K$  的投影, 由表达式  $G(q) = P_{H_K} F(q) = \langle F, K_q \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}$  给出.

**第 2 步** 对于  $G = \langle F, K_q \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}$  寻求一个它在  $H_K$  中的 POAFD 的稀疏表示,

$$G = \sum_{k=1}^{\infty} \langle G, B_k \rangle_{H_K} B_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \langle F, K_{(\cdot)} \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}, B_k \rangle_{H_K} B_k.$$

对于  $G$  求逆, 得到下面的定理:

**定理 3.2** 设在  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构下  $H_K$  是  $\tilde{\mathcal{H}}$  的闭子空间, 则函数  $F \in \tilde{\mathcal{H}}$  的 Moore-Penrose 伪逆是在  $\mathcal{H}$  中收敛的 POAFD 级数

$$S_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \langle F, K_{(\cdot)} \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}, B_k \rangle_{H_K} L^{-1} B_k.$$

记  $d_F$  为在  $\tilde{\mathcal{H}}$  空间中  $F$  到  $H_K$  的距离, 则

$$\left\| F - \sum_{k=1}^n \langle \langle F, K_{(\cdot)} \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}, B_k \rangle_{H_K} L^{-1} B_k \right\|_{\tilde{\mathcal{H}}} \leq d_F + \frac{M}{\sqrt{n}},$$

如果投影函数  $P_{H_K} F = \langle F, K_{(\cdot)} \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} \in \mathcal{M}_M$ .

#### 4 一个恒等逼近的例子

作为  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构下数值计算最简单的例子, 给出实数轴上能量有限函数的 Poisson 核线性组合的逼近. 设在  $\mathcal{H}$ - $H_K$  结构下, 函数集合  $h_p$  ( $p \in \mathbf{E}$ ) 的线性组合在  $\mathcal{H}$  中稠密. 此时对每一个  $p \in \mathbf{E}$ ,  $L(f)(p) = 0$  蕴涵  $f \perp \mathcal{H}$ , 因而  $f = 0$ . 从而  $N(L) = \{0\}$ , 等同于  $N(L)^\perp = \mathcal{H}$ . 后一结论意味着  $\mathcal{H}$  等距同构于  $H_K$ . 因而, 这时  $H_K$  中的 POAFD 给出一个  $\mathcal{H}$  中的稀疏表示. 下面以  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ ,

$$h_p(y) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + (x-y)^2} = P_t(x-y), \quad p \in \mathbf{E} = \{(t, x) \mid t > 0, x \in \mathbb{R}\}$$

为例来说明  $\mathcal{H}$ - $H_K$  理论对于恒等逼近的有效可应用性.

对于  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , 算子  $L$  被定义为

$$Lf(t, x) = \langle f, h_{(t,x)} \rangle = (f * P_t)(x) = u(t, x).$$

$\mathcal{H}$ - $H_K$  理论确定  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{H_K}$ , 此处调和函数理论中  $H_K$  被确定为上半空间  $\mathbb{C}^+$  调和函数构成的 Hardy 空间, 后者定义为

$$h^2(\mathbb{C}^+) = \left\{ u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} : \Delta u = 0, \sup_{t>0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

进而能够证明在  $L^2(\mathbb{R})$  和非切向几乎处处点态意义下都有

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = f(x).$$

由于最后这个性质, 因此也记  $f(x) = u(0, x)$ , 因而,

$$\|u(0, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|u\|_{h_2(\mathbb{C}^+)}.$$

$H_K$  的再生核计算如下. 对  $p = (t, x), q = (t_1, x_1)$ , 有

$$\begin{aligned}
 K(q, p) &= K((t_1, x_1), (t, x)) \\
 &= \langle h_{(t_1, x_1)}, h_{(t, x)} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{(t_1, x_1)}(y) h_{(t, x)}(y) dy \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t_1}{t_1^2 + (x_1 - y)^2} \frac{t}{t^2 + (x - y)^2} dy \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t_1}{t_1^2 + (0 - y)^2} \frac{t}{t^2 + (x - x_1 - y)^2} dy \\
 &= (P_{t_1} * P_t)(x - x_1) \\
 &= P_{t_1+t}(x - x_1),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中最后一个等号是由于下述 Dirichlet 问题的解的唯一性:

$$\Delta u = 0, \quad u(x, 0) = P_{y_1}(x - x_1).$$

上述计算实际上是在  $\mathcal{H}\text{-}H_K$  的语言下验证 Poisson 核的半群性质. 函数  $K_q$  的再生核性质验证如下: 对于  $u \in H_K = h^2(\mathbb{C}), q = (t_1, x_1)$ , 由  $H_K$  中的模的定义, 有

$$\langle u, K_q \rangle_{H_K} = \langle u(\cdot, 0), P_{t_1}(x_1 - \cdot) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = (u(\cdot, 0) * P_{t_1})(x_1) = u(t_1, x_1).$$

为了能够在  $H_K$  中进行 POAFD, 首先要得到么模化了的核

$$E_q(p) = \frac{K_q(p)}{\|K_q\|_{H_K}} = \sqrt{2\pi t_1} K(q, p) = \sqrt{2\pi t_1} P_{t+t_1}(x - x_1),$$

其中  $\|K_q\|$  的量值的计算使用了再生核的性质及 (4.1):

$$\|K_q\|_{H_K}^2 = \langle K_q, K_q \rangle_{H_K} = K(q, q) = P_{2t_1}(0) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2t_1}.$$

作为进行 POAFD 的理论准备还须证明这个调和函数场合的边界趋零性质 (boundary vanishing condition, BVC):

$$\lim_{q \rightarrow \partial E} |\langle u, E_q \rangle_{H_K}| = 0. \tag{4.2}$$

这个关系式的证明本文略去. 需要注明,  $\mathbb{C}^+$  的边界被定义为  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , 边界的邻域是  $\mathbb{R}$  的邻域合并上无穷远点  $\infty$  的邻域, 后者用的是相对于无穷远点  $\infty$  一点的紧化之拓扑意义下的邻域.

计算的例子: 下面验证基于一个已知函数  $f(y)$  的样本抽取值  $v_l = f(y_l), l = 1, \dots, N$ , 用 POAFD 算法重建函数  $f(y)$  的有效性. 由于我们将使用 Poisson 核的逼近, 也记  $f(y) = u(0, y)$ , 其中对于  $p = (t, x)$ ,

$$u(p) = (Lf)(p) = \langle f, h_p \rangle = (f * P_t)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2 + (x - y)^2} f(y) dy.$$

为比较计, 采用下述模型式的例子. 设

$$u(0, y) = f(y) = \sum_{k=1}^5 \frac{\tilde{c}_k}{\pi} \frac{\tilde{t}_k}{\tilde{t}_k^2 + (\tilde{x}_k - y)^2} = \sum_{k=1}^5 \tilde{c}_k P_{\tilde{t}_k}(\tilde{x}_k - y) = \sum_{k=1}^5 \tilde{c}_k K_{\tilde{p}_k}(0, y), \tag{4.3}$$

其中

$$\begin{aligned} \{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4, \tilde{p}_5\} &= \{(\tilde{t}_1, \tilde{x}_1), (\tilde{t}_2, \tilde{x}_2), (\tilde{t}_3, \tilde{x}_3), (\tilde{t}_4, \tilde{x}_4), (\tilde{t}_5, \tilde{x}_5)\} \\ &= \{(2, 2), (0.5, -3.5), (1, -2), (3, 1), (5, 0.5)\}, \\ \{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4, \tilde{c}_5\} &= \{1, -2, 3, -4, 5\}. \end{aligned}$$

在此例中, 对一般的  $p = (t, x)$ , 有

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^5 \frac{\tilde{c}_k}{\pi} \frac{\tilde{t}_k + t}{(\tilde{t}_k + t)^2 + (\tilde{x}_k - x)^2} = \sum_{k=1}^5 \tilde{c}_k P_{\tilde{t}_k + t}(\tilde{x}_k - x) = \sum_{k=1}^5 \tilde{c}_k K_{\tilde{p}_k}(p). \quad (4.4)$$

下面所做的, 是在只知道取样点  $f(y_l) = u(0, y_l)$  ( $l = 1, \dots, N$ ) 的前提下, 用 3-项、5-项和 7-项的 POAFD 级数逼近  $f(y)$ , 其中 3-项逼近属于模型约化范畴.

制作 3-项 POAFD 逼近函数  $F$  的过程是在预正交极大选择原理下接续找到  $q_1$ 、 $q_2$  和  $q_3$ , 其分别记为  $(t_1, x_1)$ 、 $(t_2, x_2)$ 、 $(t_3, x_3)$ , 以及构成函数  $F(y) = \sum_{k=1}^3 \langle f, B_k \rangle B_k$ , 此处  $\{B_1, B_2, B_3\}$  是  $h_{q_1}$ 、 $h_{q_2}$  和  $h_{q_3}$  的接续正交标准化, 其中  $h_{q_k}(y) = P_{t_k}(x_k - y)$ ,  $k = 1, 2, 3$ . 根据 POAFD 的原理可知  $F(y)$  给出  $f(y)$  的一个初阶的逼近. 5-项和 7-项的 POAFD 级数给出对  $f(y)$  较好的逼近, 制作方法类似.

作为计算的第 1 步, 3-项 POAFD 始于寻找  $q_1 = (t_1, x_1)$  使得

$$q_1 = \max\{|\langle u, E_q \rangle| \mid q = (t, x) \in \mathbb{R}_+^2\}.$$

由再生核的性质有

$$|\langle u, E_q \rangle| = \sqrt{2\pi t} |u(t, x)| = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2 + (x - y)^2} f(y) dy.$$

图 1 分别为对于 (4.3) 给出的函数数据  $f(y)$  的 3-项、5-项和 7-项 POAFD 逼近, 其中虚曲线是原  $f(y)$  或数据的图像, 而实曲线分别是 3 个不同阶的逼近曲线. 加密数据取样会显著改善各阶所能达到的最佳逼近.

接续 3 个逼近的相对误差  $RE = \frac{\|f - F\|}{\|f\|}$  经计算分别为 0.1312、0.0636 和 0.0020.

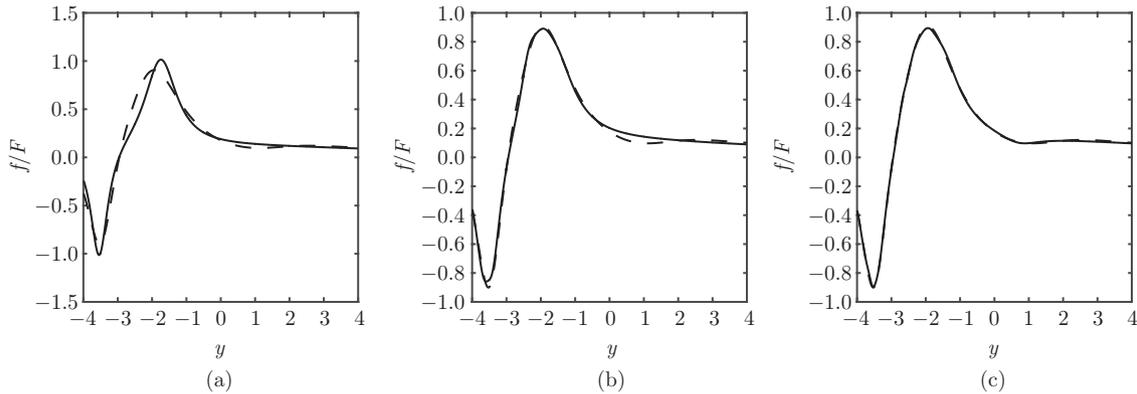


图 1 应用 Poisson 核的 POAFD 逼近. (a) 3-项 POAFD 逼近; (b) 5-项 POAFD 逼近; (c) 7-项 POAFD 逼近

## 5 结论

适合于一类广泛线性算子的  $\mathcal{H}\text{-}H_K$  结构自包含一个机制能给出该算子理论中基本的问题的解. 本文的工作是将 POAFD 算法引入  $\mathcal{H}\text{-}H_K$  结构, 从而提供线性算子的一种有效的稀疏表示方法. 该方法可应用于积分方程、常微分方程和偏微分方程, 以及优化问题的数值计算. 所给出的实验证实了 POAFD 对于  $\mathcal{H}\text{-}H_K$  结构的有效性.

**致谢** 第一作者感谢学长郭懋正. 与他的交流增加了作者对于该专题, 特别是对第 3 个具体问题 (Moore-Penrose 伪逆) 假设条件的理解. 他仔细地阅读了原稿并提出了宝贵的意见.

## 参考文献

- 1 Saitoh S, Sawano Y. Theory of Reproducing Kernels and Applications. Singapore: Springer, 2016
- 2 Saitoh S. Theory of Reproducing Kernels and Its Applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 189. Harlow: Longman Scientific and Technical, 1988
- 3 Qian T. Reproducing kernel sparse representations in relation to operator equations. Complex Anal Oper Theory, 2020, 14: 1–15
- 4 Stein E M, Weiss G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton: Princeton University Press, 1971
- 5 Li H C, Deng G T, Qian T. Fourier spectrum characterizations of  $H^p$  spaces on tubes over cones for  $1 \leq p \leq \infty$ . Complex Anal Oper Theory, 2018, 12: 1193–1218
- 6 Dang P, Mai W X, Qian T. Fourier spectrum of Clifford  $H^p$  spaces on  $\mathbb{R}_+^{n+1}$  for  $1 \leq p \leq \infty$ . J Math Anal Appl, 2020, 483: 123598
- 7 Mai W X, Qian T. Rational approximation in Hardy spaces on strips. Complex Var Elliptic Equ, 2018, 63: 1721–1738
- 8 Cui M G, Wu B Y. Numerical Analysis of Reproducing Kernel Space (in Chinese). Beijing: Science Press, 2004 [崔明根, 吴勃英. 再生核空间数值分析. 北京: 科学出版社, 2004]
- 9 Zhang X J. Theory and Application of Reproducing Kernel (in Chinese). Beijing: Science Press, 2010 [张新建. 再生核的理论与应用. 北京: 科学出版社, 2010]
- 10 Qian T. Two-dimensional adaptive Fourier decomposition. Math Methods Appl Sci, 2016, 39: 2431–2448
- 11 Qian T. Adaptive Fourier Decomposition: A Mathematical Method in Connection with Complex Geometry, Harmonic Analysis and Signal Analysis (in Chinese). Beijing: Science Press, 2015 [钱涛. 自适应 Fourier 变换: 一个贯穿复几何, 调和分析及信号分析的数学方法. 北京: 科学出版社, 2015]
- 12 Qian T, Wang Y B. Adaptive Fourier series—a variation of greedy algorithm. Adv Comput Math, 2011, 34: 279–293
- 13 Qu W, Dang P. Rational approximation in a class of weighted Hardy spaces. Complex Anal Oper Theory, 2019, 13: 1827–1852
- 14 Qu W, Dang P. Reproducing kernel approximation in weighted Bergman spaces: Algorithm and applications. Math Methods Appl Sci, 2019, 42: 4292–4304
- 15 Alpay D, Colombo F, Qian T, et al. Adaptive orthonormal systems for matrix-valued functions. Proc Amer Math Soc, 2017, 145: 2089–2106
- 16 Alpay D, Colombo F, Qian T, et al. Adaptive decomposition: The case of the Drury-Arveson space. J Fourier Anal Appl, 2017, 23: 1426–1444
- 17 Mallat S, Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries. IEEE Trans Signal Process, 1993, 41: 3397–3415
- 18 Livshitz E, Temlyakov V N. On convergence of weak greedy algorithms. Tr Mat Inst Steklova, 2001, 232: 236–247
- 19 Nahon M. Phase evaluation and segmentation. PhD Thesis. New Haven: Yale University, 2000
- 20 Qian T. Intrinsic mono-component decomposition of functions: An advance of Fourier theory. Math Methods Appl Sci, 2010, 33: 880–891
- 21 Coifman R R, Steinerberger S. Nonlinear phase unwinding of functions. J Fourier Anal Appl, 2017, 23: 778–809
- 22 Coifman R R, Peyrière J. Phase unwinding, or invariant subspace decompositions of Hardy spaces. J Fourier Anal Appl, 2019, 25: 684–695
- 23 Mai W X, Qian T. Aveiro method in reproducing kernel Hilbert spaces under complete dictionary. Math Methods Appl Sci, 2017, 40: 7240–7254
- 24 Qian T. A novel Fourier theory on non-linear phases and applications (in Chinese). Adv Math (China), 2018, 47: 3–29 [钱涛. 一种新的基于非线性相位的 Fourier 理论及其应用. 数学进展, 2018, 47: 3–29]

- 25 Chen Q H, Qian T, Tan L H. A theory on non-constant frequency decompositions and applications. In: *Advancements in Complex Analysis: From Theory to Practice*. New York: Springer, 2020, 1–37
- 26 Qian T, Sprößig W, Wang J X. Adaptive Fourier decomposition of functions in quaternionic Hardy spaces. *Math Methods Appl Sci*, 2012, 35: 43–64
- 27 Walsh L. *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*. Providence: Amer Math Soc, 1960
- 28 Ruckebusch G. *Sur l'approximation rationnelle des filtres*. Technical Report. Palaiseau: École Polytechnique, 1978
- 29 Baratchart L. Existence and generic properties of  $L^2$  approximations for linear systems. *IMA J Math Control Inform*, 1986, 3: 89–101
- 30 Baratchart L, Cardelli M, Olivi M. Identification and rational  $L^2$  approximation: A gradient algorithm. *Automatica*, 1991, 27: 413–417
- 31 Qian T, Wang J Z, Mai W X. An enhancement algorithm for cyclic adaptive Fourier decomposition. *Appl Comput Harmon Anal*, 2019, 47: 516–525
- 32 Mi W, Qian T. Frequency-domain identification: An algorithm based on an adaptive rational orthogonal system. *Automatica*, 2012, 48: 1154–1162
- 33 Mi W, Li S, Feng L. Mixed model identification for linear time-invariant systems with mixed noises in frequency domain. *Math Methods Appl Sci*, 2019, 42: 7285–7295
- 34 Li Y T, Qian T. A novel 2D partial unwinding adaptive Fourier decomposition method with application to frequency domain system identification. *Math Methods Appl Sci*, 2019, 42: 3123–3135
- 35 Li Y T, Zhang L M, Qian T. 2D partial unwinding—a novel non-linear phase decomposition of images. *IEEE Trans Image Process*, 2019, 28: 4762–4773
- 36 Wang X Y, Qian T, Leong I T, et al. Two-dimensional frequency-domain system identification. *IEEE Trans Automat Control*, 2020, 65: 577–590

## Sparse representations in reproducing kernels of operator equations

Tao Qian, Wei Qu & Yong Huang

**Abstract** In a Hilbert space a linear operator defined through an inner product kernel has a natural reproducing kernel structure. In the present paper we first define what we call the  $\mathcal{H}$ - $H_K$  formulation that stands as an axiomatic basis of the study. There is a built-in mechanism in the  $\mathcal{H}$ - $H_K$  formulation that can straightforwardly solve three basic type problems, namely, the image function identification, inverse problem, and Moore–Penrose pseudo-inverse problem. After a summary on the classical basis method we introduce the POAFD (pre-orthogonal adaptive Fourier decomposition) “non-basis” method in the  $\mathcal{H}$ - $H_K$  formulation. We give historical notes, theoretical foundations, as well as algorithm principles of POAFD. The maximal selection principle of POAFD makes itself be the best among all the existing matching pursuit methods in the one-step-optimal-selection category. It, therefore, can be used to give fast converging sparse numerical solutions of approximation, ordinary and partial differential equations, and optimization problems.

**Keywords** reproducing kernel Hilbert space, sparse representation, operator equation, inverse problem

**MSC(2010)** 42A16, 42A20, 41A30, 30B99, 34K28, 35A35

**doi:** 10.1360/SSM-2020-0056